

— 2024 年度日本海洋学会岡田賞受賞記念論文 —

外洋域の鉛直混合に関わる内部波共鳴現象の理論的・数値的研究*

大貫 陽平†

要 旨

急峻な海底地形上を通過する潮汐流によって励起される内部重力波（内部潮汐）は、安定に密度成層した海水を重力に逆らいかき混ぜることで熱や物質の鉛直輸送を促し、全球規模の海洋循環や気候変動、生態系の維持に重要な役割を果たしている。しかし、広大な海の中で内部潮汐がどこで、どうやって海水の混合を引き起こしているのかは未だ十分に理解されていない。この問題の解決のためには、水平波長 100 km 以上に及ぶ内部潮汐のエネルギーが、小スケールの乱流へとカスケードダウンしていく仕組みを明らかにする必要がある。本稿では、中緯度域において内部潮汐に作用してエネルギーカスケードをもたらす内部波間の共鳴現象 parametric subharmonic instability (PSI) について、その歴史的背景と筆者が取り組んできた理論研究を解説する。PSI のメカニズムの初等的な説明に始まり、波動運動論方程式や Floquet 理論、変形座標系での数値シミュレーションといった技法に触れ、それらを工夫して用いることで既存研究が抱えていた問題点を克服していった一連の過程を詳述する。本稿の結びでは、乱流混合や深層循環に関する近年の研究動向と今後の展望を議論するとともに、物性物理学に触発されて筆者が近年進めている新趣向の研究テーマについて一部紹介する。

キーワード：海洋力学、内部重力波、波動間相互作用、乱流混合、数値モデル

1. はじめに

海洋の中深層における鉛直乱流混合は、歴史的に、1000 年以上の時間スケールをもつとされる深層大循環の観点でその重要性が認識されるようになった。極域で形成された冷たく重い海水を再び表層へ湧き上がらせるためには、深海に何らかの浮力源が必要であり、微細な

乱流攪拌に伴う鉛直熱輸送がその役目を担うという説である。議論の嚆矢として、Munk (1966) は海洋内部の成層構造を鉛直一次元の移流拡散モデルで考察し、深層循環の湧昇量と水温や各種物質の鉛直分布から逆算して、実効的な鉛直拡散係数を $1.3 \times 10^{-4} \text{m}^2/\text{s}$ と見積もった。しかし、乱流直接観測で得られる中深層の鉛直拡散係数は外洋域の多くで $1 \times 10^{-5} \text{m}^2/\text{s}$ 程度であり、上記の値に比べて 1 桁小さく、現実の深層循環を説明することはできない。この事実は「Missing Mixing」の問題として認識され、乱流の間欠性を示唆するものと解釈された (Munk and Wunsch, 1998)。これを受け、海のどこかに未知の「混合ホットスポット」が存在するので

* 2024 年 12 月 6 日受領 2025 年 3 月 19 日受理
著作権：日本海洋学会, 2025 年

† 九州大学 応用力学研究所
〒816-8580 福岡県春日市春日公園 6-1
email: onuki@riam.kyushu-u.ac.jp

はないかという期待が高まり、特に 1990 年代以降に世界的な深海乱流研究が花開くこととなった。

上記を背景に、今日に至るまで、全世界の主要な海域で精力的に乱流直接観測やパラメタリゼーション式を用いた乱流散逸率の推定が進められてきた（例：Waterhouse *et al.*, 2014; Kunze, 2017）。それと並行して、大循環モデルの高精度化も進展した結果（Oka and Niwa, 2013; Zemskova *et al.*, 2015; de Lavergne *et al.*, 2020; Kawasaki *et al.*, 2021）、深層循環の流量と乱流拡散係数の不一致の問題は解消されつつある（MacKinnon *et al.*, 2017）。このことは、南大洋を介した混合に依らない深層循環の力学的な理解が進んだことも一因に挙げられる（Toggweiler and Samuels, 1998; Marshall and Speer, 2012）。一方、現代にあっては、海洋乱流研究は深層循環論に留まらない意義をもっている。乱流混合がもたらす局地的な熱輸送や海盆内での物質循環が、気候変動や生態系の維持と変動に根源的な役割を演じているためである。我が国では、新学術領域研究（2015–2019 年度）「海洋混合学の創設：物質循環・気候・生態系の維持と長周期変動の解明」において、北西太平洋域での海水混合が生態系や気候へもたらす影響を探るべく、多数の研究者の協力のもと、物理・化学・生物の分野横断的な研究が展開されたことが記憶に新しい。しかしながら、地球環境システムの根幹を成す深海の乱流混合の時空間構造を決める物理機構の理解は依然として不足しており、その理論的解明が海洋学の重要課題に位置付けられている（MacKinnon *et al.*, 2017; Fox-Kemper *et al.*, 2019）。

さて、深海の乱流混合を物理的視点で議論する際、焦点になるのは乱流のエネルギー源である。一般に、海洋の力学的エネルギーはその大部分が風と潮汐から供給されるが、それらのうち密度躍層よりも下部の深海で重要なのは潮汐である。天体運動による起潮力を受けて生じる全水深一様な海水の運動、すなわち順圧潮汐は、急峻な海底地形上を通過する際に内部重力波（内部潮汐）を発生させる。内部潮汐は無数の波数成分を含むが、なかでもエネルギーの寄与が大きい鉛直低次モード成分は最大で 100 km 以上の水平波長をもち、数千 km を伝わる（Zhao *et al.*, 2016）。こうした大スケールの内部潮汐の励起と伝搬は、汎用的な数値海洋モデルを用いて概ね再現が可能である（Niwa and Hibiya, 2011; 2014）。

しかし、ひとたび発生した内部潮汐が、どこでどうやって散逸して乱流混合を引き起こすのかは判然としない。内部重力波の散逸には、広域的な数値モデルでは解像困難な、多数の微小スケールかつ非線形的な物理過程が関与するためである（Whalen *et al.*, 2020）。その一つが本研究で対象とする「共鳴不安定」である。

2. 内部潮汐の共鳴不安定

2.1. 中緯度域の潮汐混合ホットスポット

北太平洋に存在する半日周期内部潮汐の主要な励起源の近くを対象とし、2000 年代以降、東京大学の研究グループによって海洋中深層における鉛直拡散係数の船舶観測が実施された。その中で、北緯 35 度から 55 度に位置する天皇山群やアリュシャン海嶺に比べ、北緯 25 度から 30 度付近のハワイ海嶺や伊豆一小笠原海嶺の近辺で、高鉛直波数の近慣性内部重力波がもつ流速シアによって強い鉛直拡散が生じていることが明らかとなった（Fig. 1: Hibiya and Nagasawa, 2004; Hibiya *et al.*, 2006; 2007）。これは、観測に先立って実施された計算機実験の結果を裏付けるものである（Hibiya *et al.*, 2002）。その背後には、内部重力波の共鳴不安定現象の一種である parametric subharmonic instability (PSI) が関与していることが指摘された。

ここでいう PSI とは、流体の非線形性が引き起こす三波共鳴相互作用の一種であり、流体力学の分野では triadic resonant instability (TRI) とも呼ばれる（Dauxois *et al.*, 2018）。その特徴として、ある波数 k の正弦波が背景場として存在するとき、周波数を定める線形の分散関係 $\omega(k) > 0$ を通じて、共鳴相互作用条件

$$k = k_1 + k_2, \quad \omega(k) = \omega(k_1) + \omega(k_2) \quad (2-1)$$

を満たす一対の波数成分 (k_1, k_2) が不安定擾乱として励起される。地球自転と安定密度成層を考慮に入れ、伝統的近似を施した内部慣性重力波の分散関係に基づくと、周期が 12.42 時間である M_2 分潮の内部潮汐に対しては、PSI は北緯 / 南緯 28.8 度よりも赤道側の緯度帯でのみ、(2-1) の条件式を満たす波数成分が存在する。

海洋の内部重力波が PSI を生じ得ることは古くから

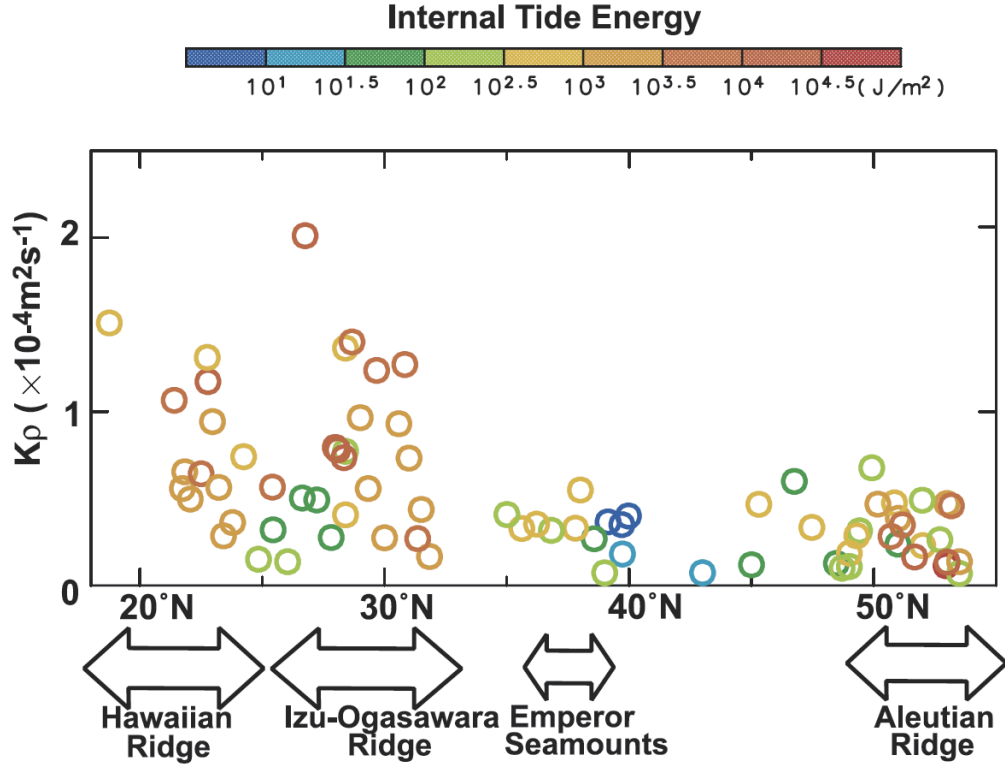


Fig 1. Estimated value of diapycnal diffusivity averaged over a depth range of 950–1450 m at each location of field observation. Colors denote model-predicted energy of semidiurnal internal tide vertically-integrated at each location of field observation [Niwa and Hibiya, 2001a, 2001b]. Reproduced from Hibiya and Nagasawa (2004). Used with permission. The caption has not been modified from the original.

議論されていたが、内部潮汐の散逸に対して重要な役割を果たしているという事実は上記の船舶観測で初めて明らかとなった。これに追従して数多くの観測および数値的研究がなされ、特に M_2 潮汐の「臨界緯度」とも呼ばれる 28.8° 付近で、PSI の発生が顕著であることが確かめられた (MacKinnon and Winters, 2005; MacKinnon *et al.*, 2013a, b; Ansong *et al.*, 2018)。この緯度帯では、PSI により生じる擾乱波の周波数 $\omega(k_1)$ および $\omega(k_2)$ は M_2 潮汐の周波数のちょうど半分となり、その場の慣性周波数に一致する。さらに、その波数は内部潮汐に比べてずっと長くなる： $|k_1|, |k_2| \gg |k|$ 。つまり、PSI によって長波長の内部潮汐は短波長の慣性振動へと変換される。話は逸れるが、PSI の名に含まれる “sub-harmonic” とは、ある周波数 ω に対して ω/n [n は整数] で定義される。よって、厳密な意味での PSI は限られた状況でのみ発生する。より広い意味を含んだ TRI の名

称が流体力学で好まれるのはそのためである。

2.2. PSI の定性的説明

条件式 (2-1) は三波の共鳴が生じるために波数と周波数が満たすべき関係を示している。これらの式は、PSI を特徴づけるものとして有名であるが、波数や周波数の条件はそのままでは直感的な理解が難しい。さらには、共鳴条件のみに基づく PSI の説明では、「空間スケールの隔てられた内部潮汐と慣性振動が、どのようにしてエネルギーのやり取りをするのか？」という疑問が残る。そこで、Onuki and Hibiya (2015) は、共鳴の条件を物理空間に置き換えて視覚的な解釈を示した。

まず、共鳴によって生じる一対の波数成分 (k_1, k_2) に注目する。これらの成分は $|k_1|, |k_2| \gg |k|$ の極限において、Fig. 2 に示すように、互いにほぼ逆符号の関係 ($k_1 \approx -k_2$) となる。さらに、慣性重力波の分散関係は波

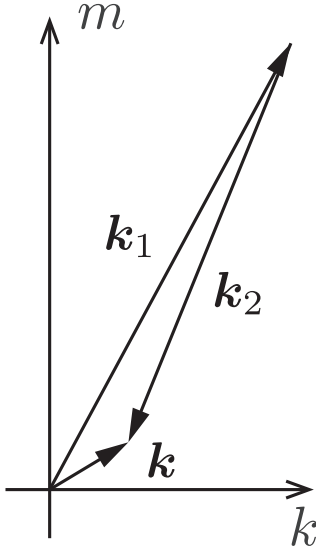


Fig 2. Wave vectors composing a resonant triad specified by Equation (2-1), which characterizes the parametric subharmonic instability of the internal gravity waves. Here, k and m indicate horizontal and vertical wavenumbers.

数の符号変換に対して $\omega(-k) = \omega(k)$ と対称的であるため、二波の周波数は概ね一致する： $\omega(k_1) \approx \omega(k_2)$ 。これらのことより、PSIで励起される擾乱は、ほぼ逆方向に伝搬する、波数の大きさと周波数が近接した二種の正弦波の重ね合わせとみなせる。

次に、波数ベクトルのわずかな差が擾乱の構造にどのように影響するかを見るため、三角関数の和積公式に基づく以下の書き換えを考える。

$$\begin{aligned} & \sin(k_1 \cdot x - \omega(k_1)t) + \sin(k_2 \cdot x - \omega(k_2)t) \\ &= 2 \sin\left(\frac{(k_1 + k_2) \cdot x - (\omega(k_1) + \omega(k_2))t}{2}\right) \\ & \quad \underbrace{\hspace{10em}}_{\text{Envelope}} \\ & \quad \times \cos\left(\frac{(k_1 - k_2) \cdot x - (\omega(k_1) - \omega(k_2))t}{2}\right) \\ & \quad \underbrace{\hspace{10em}}_{\text{Carrier wave}} \end{aligned}$$

この式の右辺において、前半部分は条件式 (2-1) より波数と周波数がそれぞれ $k/2$ および $\omega(k)/2$ となる。後半部分は、波数が $(k_1 - k_2)/2 \approx k_1$ となって擾乱波と一致するのに対し、周波数は $|\omega(k_1) - \omega(k_2)|/2 \ll \omega$ であ

ることから時間的にはほぼ定常と分かる。すなわち、PSIで励起される擾乱の時空間構造は、定常的な搬送波 (carrier wave) がつくる包絡線 (envelope) が、大きな構造を伴って振動するものとして理解できる。このように、波数の近接した2つの波を重ね合わせることで大きな構造の振幅変調が生じることは、一般には「うなり」としてよく知られる現象である。

さて、擾乱波の包絡線の波数と周波数はいずれも背景波成分のちょうど半分であるが、このことは、包絡線の節の間隔が背景波の波長と一致することを意味する。さらに、包絡線の「見かけ上の位相進行速度」を表すベクトルは、

$$\frac{\omega(k_1) + \omega(k_2)}{|k_1 + k_2|^2} (k_1 + k_2)$$

と表され、背景波の位相速度ベクトル $\omega(k)k/|k|^2$ と一致する。このことより、PSIを特徴付ける関係式 (2-1) とは、擾乱波がつくる包絡線の時空間構造が背景波と同期して共鳴を起こすための条件であると解釈できる (Fig. 3)。なお、ここで定義した包絡線の位相進行速度は、よく知られる群速度の概念とは異なる。群速度は通常、同一方向に位相進行する波数の近接した2つの正弦波を重ねることで生じる包絡線の伝達速度として解釈できるが、PSIで励起される擾乱波は逆方向に伝搬する波の重ね合わせで構成される。本来、内部重力波の群速度は慣性周波数に近づくほど小さくなるが、二種の近慣性内部重力波の重ね合わせで生じたうなりの位相進行速度は、それを構成する個々の波の位相速度や群速度よりもずっと大きくなり得る。

次に、PSIの臨界緯度において内部潮汐が慣性振動を励起する状況を想定し、その相互作用の仕組みを詳細に見てみる。Fig. 4はPSIで励起される擾乱がもつ水平流速ベクトルの鉛直軸に沿った構造を模式的に示している。逆方向に位相進行する波数の近接した2つの慣性振動擾乱が重なりあい、流速の東西成分と南北成分のそれぞれがうなりの構造を有した結果、流速ベクトルの成す細かな定在振動の包絡線が二重螺旋構造を描くことになる。この包絡線は時間とともに慣性周期で回転をしながら、背景場の内部潮汐成分と一定の位相関係を保つ。続いて Fig. 5に、内部潮汐成分の流速と、不安定励起さ

れる慣性振動擾乱に伴う流速ベクトルの包絡線との、水平面内における位置関係を示す。簡略化のため、ここでは潮汐周期を 12 時間、慣性振動周期を 24 時間とし、

内部潮汐の波数ベクトルが東西 (x) 方向を向いていると考えて南北 (y) 方向の流速勾配を 0 としている。この図の状況において、擾乱成分が背景成分からエネル

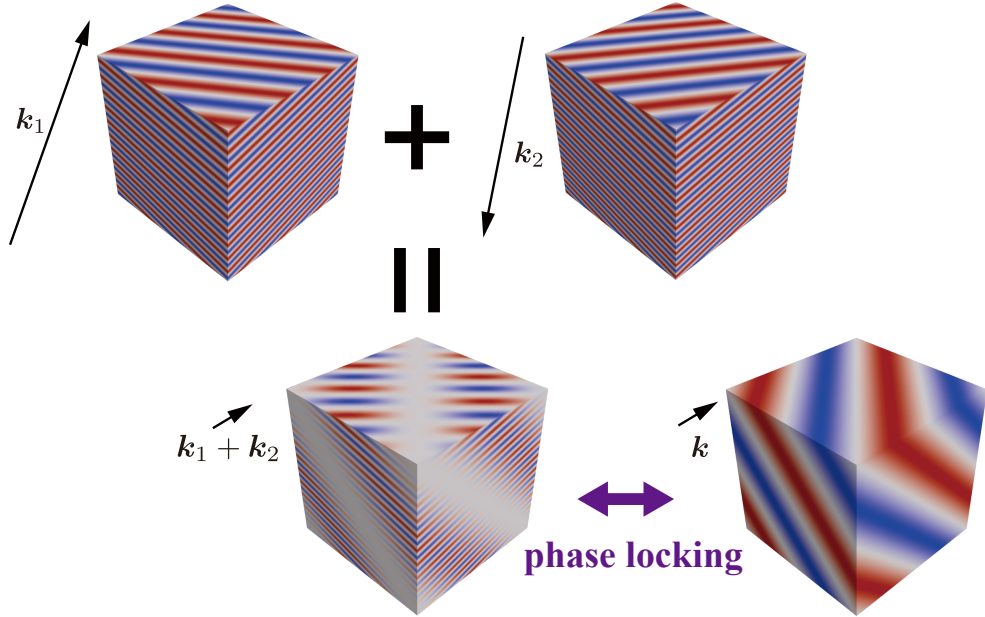


Fig 3. Spatial patterns of sinusoidal waves whose wave vectors satisfy the condition of the triad interaction $\mathbf{k} = \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2$. When the resonant condition for the frequencies $\omega(\mathbf{k}) = \omega(\mathbf{k}_1) + \omega(\mathbf{k}_2)$ is also satisfied, the phases in the background wave (right-lower one) and the envelope of the superimposed disturbances (middle-lower one) are continuously locked.

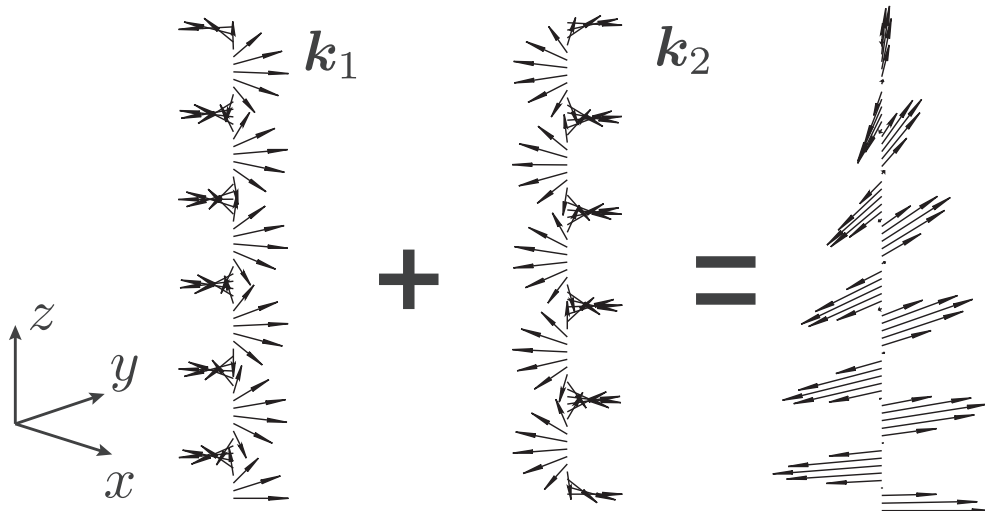


Fig 4. Vertical profiles of the horizontal velocity vector associated with inertial oscillations amplified by the parametric subharmonic instability. The linear superposition of two monochromatic waves with slightly different wave vectors and opposite rotational directions results in a large-scale envelope with a double-helix structure.

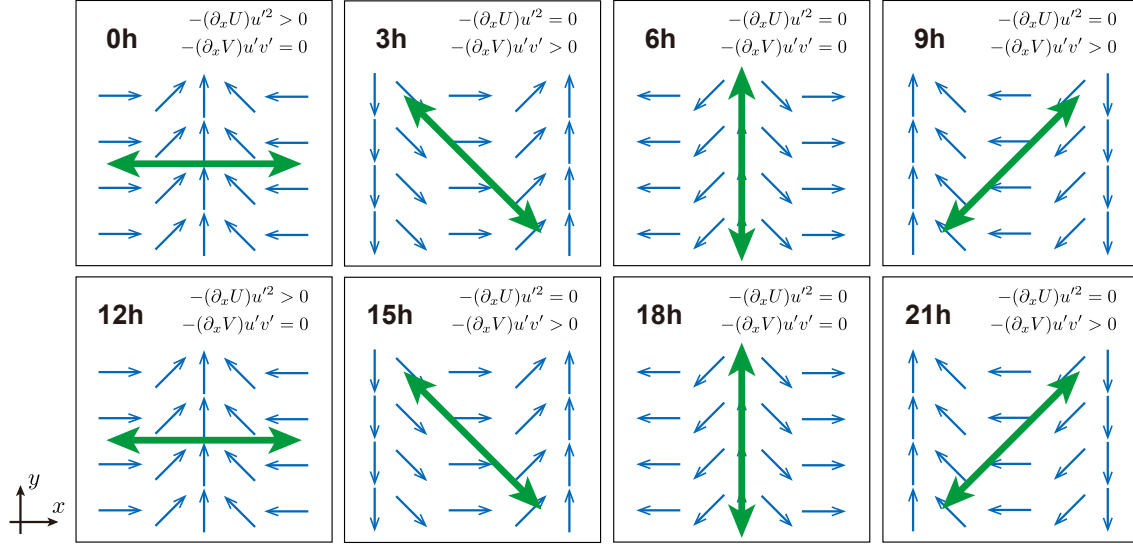


Fig 5. Schematic of the velocity field of an internal tide oscillating with a 12-h period (blue arrows) and the envelope of the inertial-oscillation velocity with a 24-h period (green arrows). The inertial oscillation is amplified through the interaction with the internal tide, as shown by the signs of its energy production terms displayed in each panel.

ギーを受け取る仕組みは次のように理解できる。

今、擾乱成分の振幅が十分小さいとすると、その時間発展は線形化された Boussinesq 近似方程式

$$\partial_t \mathbf{u}' + \mathbf{U} \cdot \nabla \mathbf{u}' + \mathbf{u}' \cdot \nabla \mathbf{U} + f \mathbf{z} \times \mathbf{u}' = -\nabla p' + b' \mathbf{z} \quad (2-2a)$$

$$\partial_t b' + \mathbf{U} \cdot \nabla b' + \mathbf{u}' \cdot \nabla B + N^2 w' = 0 \quad (2-2b)$$

および非圧縮条件 $\nabla \cdot \mathbf{u}' = 0$ に従う（粘性および拡散項は省略し、圧力 p' は代表密度で規格化している）。ここで、 $\mathbf{U} = (U, V, W)$ と B は x 方向に伝搬する（ y 方向には変化しない）背景場である内部潮汐成分の流速と浮力、 $\mathbf{u}' = (u', v', w')$ と b' は擾乱成分の流速と浮力、 N は静止状態での浮力振動数、 f はコリオリパラメータ、 $\mathbf{z}$ は鉛直上向きの単位ベクトルである。内部潮汐の振幅が十分小さい場合、擾乱成分は第一次近似として純粋な慣性振動とみなせる。慣性振動は鉛直運動を伴わず、圧力勾配項はコリオリ力の項に比べて小さいため、運動方程式の水平成分は

$$\partial_t u' + \mathbf{U} \cdot \nabla u' = -(\partial_x U)u' + f v' + R_u \quad (2-3a)$$

$$\partial_t v' + \mathbf{U} \cdot \nabla v' = -(\partial_x V)u' - f u' + R_v \quad (2-3b)$$

と書いて、 R で示した残差項の影響を無視できる。両式において、左辺第二項の背景流による移流と右辺第二項のコリオリ力はいずれも擾乱のエネルギー変化には影響しない。右辺第一項の背景流の水平勾配を含む項が擾乱振幅の増減に本質的に寄与する。これらのことは、運動エネルギー密度の時間変化が (2-3) 式より

$$\begin{aligned} & (\partial_t + \mathbf{U} \cdot \nabla) \left(\frac{u'^2 + v'^2}{2} \right) \\ &= -(\partial_x U)u'^2 - (\partial_x V)u'v' + u'R_u + v'R_v \end{aligned} \quad (2-4)$$

と書けることから明らかである。上記のエネルギー方程式を念頭に Fig. 5 を眺めると、まず時刻 0h と 12h において (2-4) 式の右辺第一項が正であると分かる。次に時刻 3h, 9h, 15h, 21h において (2-4) 式の右辺第二項が正である。最後に時刻 6h と 18h においては、(2-4) 式の右辺第一項と第二項はいずれも 0 となる。つまり、慣性振動の一周期において、擾乱成分は背景流の空間勾配の影響を受けて断続的に増幅すると理解できる。

ところで、方程式 (2-3) においては、背景流速が小さいとすると未知変数である擾乱成分 (u', v') は固有周期 $2\pi/f$ をもち、一方で方程式の係数である (U, V)

は周期 π/f で振動する。このように、周期について変数と係数に 2:1 の関係が成立することが一般のパラメトリック不安定、あるいは幅広い文脈で「パラメトリック励振」と呼ばれる現象の特徴である。なお、Fig. 5 を用いた説明では慣性振動周期と潮汐周期がちょうど 2:1 となる状況を想定したが、より一般に、個々の擾乱の周期が潮汐周期の 2 倍からずれていたとしても、PSI で成長する擾乱流速の包絡線の振動周期に着目すればこの図と同様の機構が成立する（ただしその場合は鉛直流速と浮力もエネルギー変換に寄与する）。よって、臨界緯度よりも赤道側の幅広い海域において、様々な波数成分の擾乱がパラメトリック不安定の条件を満たす。PSI が顕著な緯度依存性を示し、慣性振動を選択的に励起する理由については、より踏み込んだ考察が必要となる。

3. PSI の定量的理解に向けて

内部重力波の三波相互作用やパラメトリック不安定に関する研究の歴史は長い。なかでも、PSI を定量的に扱う理論研究に限れば、先行研究は概ね 2 通りに分類される。一つ目は、単一の周波数をもつ内部重力波を背景場として、そこに重ねられた擾乱の安定性を調べたものである (Mied, 1976; Klostermeyer, 1982; Lombard and Riley, 1996; Sonmor and Klaassen, 1997; Yau *et al.*, 2004; Young *et al.*, 2008)。この問題は、一般に Floquet 理論と呼ばれる研究分野に属する。二つ目は、連続的な周波数スペクトルをもつ内部重力波場が、弱い非線形性によって時間変化する過程を統計的に調べるものであり (Olbers, 1983; Müller *et al.*, 1986; Polzin and Lvov, 2011)、弱非線形乱流 (weak turbulence) あるいは波動乱流 (wave turbulence) と呼ばれる研究分野が対応する (Zakharov *et al.*, 1992; Nazarenko, 2011)。いずれの文脈においても、PSI は内部重力波のエネルギーを小スケール成分へと変換する重要な物理現象として古くから知られてきた。

3.1. 理論研究と観測研究の不一致

このように、時代を追って PSI に関する研究を眺めると、素朴な考えとして「なぜ、2000 年代の日本グループの研究まで、誰も内部潮汐に作用する PSI の重要性に気

が付かなかったのか？」という疑問が湧く。内部潮汐の広域的な分布が把握されるようになったのは、数値モデル開発と海面高度データの収集が進展した 1990 年代以降であるが、天体運動から供給される潮汐のエネルギーのうち、相当の割合が内部潮汐に変換されるであろうことは 1970 年代には既に明らかとなっていた (Wunsch, 1975)。よって、その散逸メカニズムとして、PSI を含む内部重力波間の非線形相互作用に対し、もっと早くから目を向けられてもおかしくなかったはずである。

この疑問への一つの答えとなるのが、Olbers and Pomphrey (1981) である。わずか 3 ページで構成されたこの論文で、著者たちは、内部潮汐に作用する波動間相互作用は海洋内部重力波のエネルギーバランスにおいて役割を果たさない (“play no role”) と結論付けた。その根拠としたのは、当時研究が盛んであった、弱非線形乱流においてエネルギー Spektral の時間発展を記述する波動運動論方程式 (wave kinetic equation : WKE) の数値積分である。鉛直低次モード成分の内部潮汐と海洋内部の標準的なエネルギー Spektral である Garrett-Munk (GM) Spektral が相互作用することを想定して計算した結果、鉛直第一モードの内部潮汐がエネルギーを失うまでには中緯度域で数百日程度の時間を要すると推定した。この結果は、その後に行われた Navier-Stokes 方程式の数値解析 (例 : Hibiya *et al.*, 2002) や観測研究の結果に反している。

上に述べた WKE に基づく 1980 年代の研究では内部潮汐の減衰時間が正確に推定できなかった理由として、まず考えられるのは当時の計算機性能の問題である。一般に、WKE の計算には高次元の波数空間内において共鳴条件を満たす組み合わせ成分についての連続的な積分が必要となる。数値誤差を抑えてエネルギー輸送量を精度良く見積もるためには、相当量の計算が必要であり、当時は正しく波数積分の評価ができていなかった可能性がある。それに対し、より近年の研究として、Eden and Olbers (2014) は WKE の数値積分により内部潮汐のエネルギー減衰率を再び見積もった。しかし、彼らの計算結果では、内部潮汐の減衰率は赤道から離れるに従って単調に減少をしており、観測で確かめられたような臨界緯度での顕著な内部潮汐の減衰を再現できていない。内部潮汐に作用する PSI についての理論と観測の不

一致は、2010年代の後半になっても依然として解決がなされていないかった。

3.2. 改良型の波動運動論方程式に基づく計算

以上の問題を受け、Onuki and Hibiya (2018) は WKE の導出と計算方法を見直し、波動間相互作用による内部潮汐の減衰率について理論と観測のギャップを埋めることを目指した。内部重力波に対する波動運動論方程式を用いた近年の研究では、無限水深かつ背景成層の一様性を前提とした三次元フーリエ変換による定式化が共通して用いられてきた。しかし、現実海洋における長波長の内部潮汐を考える際には、上下境界と成層構造で決まる鉛直固有モードの構造関数で方程式を展開することが適切であると考えられる。モード波展開に基づく WKE は、古くは Hasselmann (1966) や Pomphrey *et al.* (1980) で採用されているが、当時の非静水圧方程式系の定式化では鉛直構造関数が周波数によって変化するため、複雑な成層構造に対する高精度の数値解析は実質的に不可能である。筆者らの研究では、Lvov and Tabak (2004) が採用した静水圧系の正準方程式による定式化を任意の成層構造に拡張することで、内部潮汐に対する PSI を評価するのに最も適した形式の WKE、

$$\begin{aligned} \frac{\partial n_1}{\partial t} = & \pi \sum_{j_{2,3}} \int |V_{123}|^2 (n_2 n_3 - n_2 n_1 - n_1 n_3) \\ & \times \delta(k_1 - k_2 - k_3) \delta(\omega_1 - \omega_2 - \omega_3) dk_{2,3} \\ & - 2\pi \sum_{j_{2,3}} \int |V_{213}|^2 (n_1 n_3 - n_1 n_2 - n_2 n_3) \\ & \times \delta(k_2 - k_1 - k_3) \delta(\omega_2 - \omega_1 - \omega_3) dk_{2,3} \end{aligned} \quad (3-1)$$

を導出した。ここで、 $n(k, j)$ は水平波数 k 、鉛直モード $j \geq 1$ の成分がもつ wave action 密度であり、エネルギー密度を固有周波数で除したものを表す。周波数は静水圧近似における慣性重力波の分散関係 $\omega(k, j) = \sqrt{f^2 + g\bar{D}_j} |k|$ で定められる。分散関係に含まれる各鉛直モードの等価水深 $\bar{D}_j$ の値は、後述する固有値方程式を解いて得られる。表記の都合上、 $n_1 = n(k_1, j_1)$ といったように、添え字で波数および周波数を区別している。成分間の非線形結合係数 $V_{123} \equiv V(k_1, k_2, k_3, j_1, j_2, j_3)$ は、各モードの鉛直構造関数に依存する部分と水平波数および周波数の関数に $V_{123} = R$

$(j_1, j_2, j_3) \bar{V}(k_1, k_2, k_3, \omega_1, \omega_2, \omega_3)$ と分離でき、前半部分は海洋の全水深を D として

$$R(j_1, j_2, j_3) = \int_{-D}^0 \Phi_{j_1}(z) \Phi_{j_2}(z) \Phi_{j_3}(z) dz$$

と書かれる。ここで、鉛直構造関数 Φ_j は密度プロファイル $\rho(z)$ と代表密度 ρ_c に対して定義される固有値方程式

$$\bar{D}\Phi = \frac{\rho(z)}{\rho_c} \int_{-D}^z \Phi(z') dz' + \int_z^0 \frac{\rho(z')}{\rho_c} \Phi(z') dz'$$

の解として固有値 $\bar{D}$ と合わせて決定される。

方程式 (3-1) は、三波共鳴の条件を満たす波数成分の相互作用のみを考慮に入れて内部重力波スペクトルの時間変化を記述する。デルタ関数を含む複雑な波数積分を含むため、この方程式を有限の時間に渡って解くことは相当な労力を要するが、方程式を今一度よく眺めると、右辺の相互作用項は n_1 に比例する項とそうでない項に分けられ、形式的に

$$\frac{\partial n_1}{\partial t} = -\nu[n_2, n_3] n_1 + G[n_2, n_3]$$

と書くことができる。ここで定義した $\nu[n_2, n_3]$ は、内部重力波スペクトルの汎関数であって時間の逆数の次元をもち、波動間相互作用による $n(k_1, j_1)$ 成分の減衰率を定める。右辺第二項の G は、二成分 $n(k_2, j_2)$ と $n(k_3, j_3)$ の掛け合わせによって $n(k_1, j_1)$ 成分が増幅する効果を表す。三波共鳴による内部潮汐の減衰には直接関与しないため、ここでは考慮しないことにする。

Onuki and Hibiya (2018) では、内部重力波スペクトルには最も標準的な GM スペクトル (Munk, 1981) を採用し、固有値計算のためのデータとして World Ocean Atlas (Locarnini *et al.*, 2013; Zweng *et al.*, 2013) の水温・塩分から海水の圧縮性を考慮して計算した鉛直密度プロファイルと ETOPO1 (Amante and Eakins, 2009) の地形を用いて、鉛直低次モードの M_2 内部潮汐の減衰率 ν を計算した。その全球的な分布を Fig. 6 に示す。一見して北緯/南緯 29 度の臨界緯度を境に値が大きく変化することが分かる。これは、(3-1) 式の WKE において、右辺第一項に含まれる共鳴条件を表す成分 $\delta(\omega_1 - \omega_2 - \omega_3)$ が高緯度側で常に 0 となる

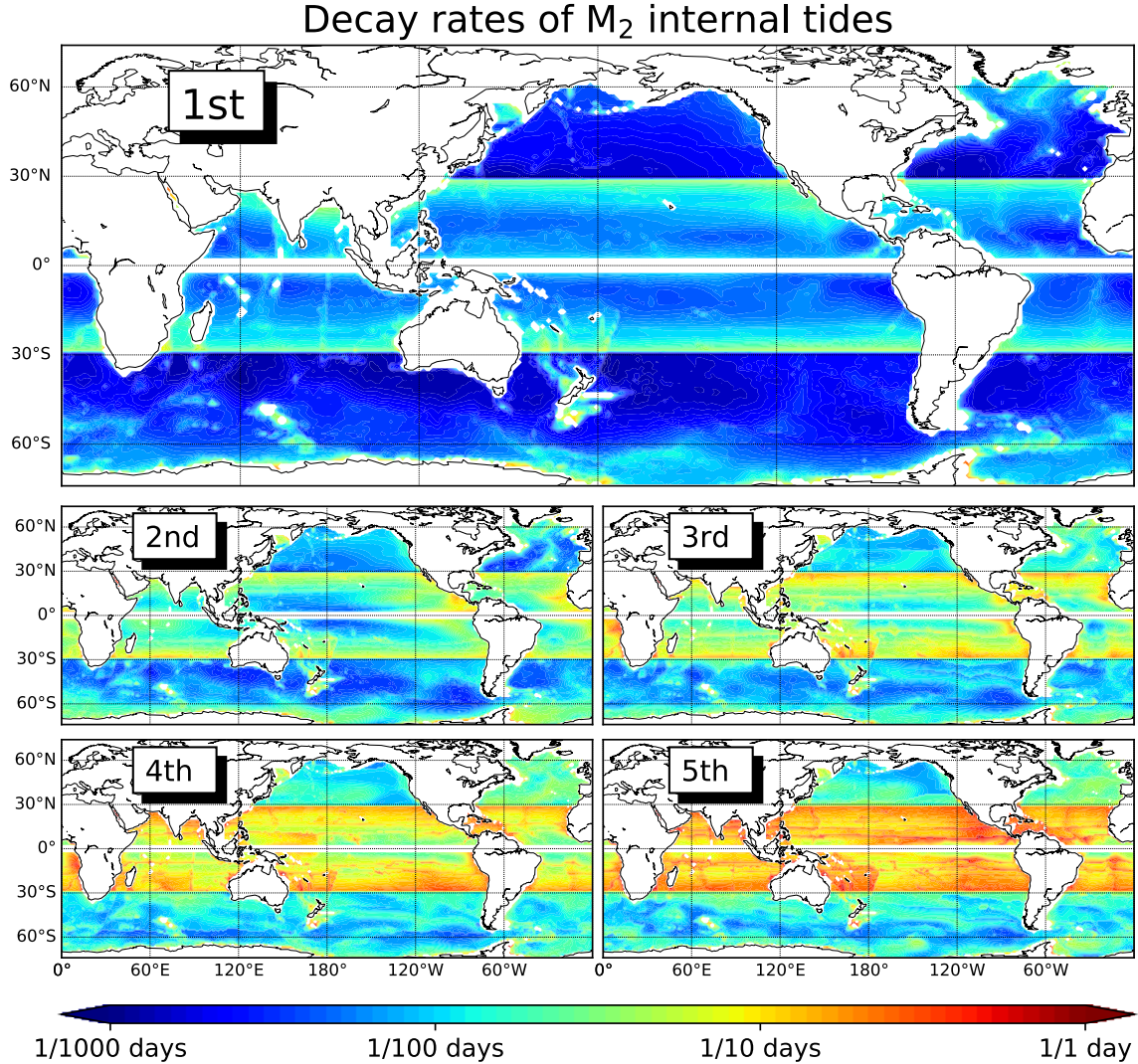


Fig. 6 Numerically estimated decay rates ν for the lowest five modes of the principal lunar semidiurnal constituent (M_2 tide) interacting with the background wave spectrum. The numbers below the color bar indicate the e-folding times of the wave energy. Reproduced from Onuki and Hibiya (2018). ©American Meteorological Society. Used with permission.

ことを反映している。つまり、PSIの発生の有無によって内部潮汐の減衰率は著しく変化する。低緯度側においては、減衰率は臨界緯度にピークをもち、赤道に向かうにつれて小さくなっていく。この結果は、Eden and Olbers (2014) と大きく異なり、より現実に即したものとなっている。鉛直第一モードの減衰時間は、臨界緯度付近の中緯度で数十日程度であり、1980年代の計算に比べて一桁短く、内部潮汐のエネルギー収支に対して無視できない寄与をする。以上のことより、本研究はこ

れまでの文献の情報を刷新して「WKEに基づく理論計算は波動間相互作用による内部潮汐の減衰率の推定に有効である」ことの根拠を打ち出すことに成功した。

さて、(3-1)式で定義したWKEは鉛直構造関数についての z 積分を含んでいる。よって、そのままでは「どの深さで内部潮汐の減衰が顕著であるか？」という重要な疑問に答えることができない。そこで、やや技巧的ではあるが、結合係数に含まれる積分因子を分離して以下のように書き換える。

$$|V_{123}|^2 = \int_{-D}^0 \Phi_{j_1}(z) \Phi_{j_2}(z) \Phi_{j_3}(z) R(j_1, j_2, j_3) |\tilde{V}_{123}|^2 dz \quad (3-2)$$

これを (3-1) 式に代入して、鉛直積分と波数積分の順序を入れ替えて整理すると、鉛直座標に依存した減衰率 ν を $\nu = \int_{-D}^0 \nu'(z) dz$ を満たすように定義できる。式 (3-2) から分かるように、こうして定義された「各深度での減衰率」 ν' は、各々の三波相互作用において鉛直構造関数 Φ の三重積に比例した大きさをもつ。前節にお

いて、内部潮汐の臨界緯度での PSI によるエネルギー輸送は主に式 (2-4) の右辺第一項と第二項で表現されることを述べたが、 Φ が水平流速の構造関数であることを踏まえれば、ここでの ν' の定義式は物理的にも理にかなったものとなっている。Fig. 7 は M_2 内部潮汐に対する ν' の値を西経 179.5 度に沿った南北断面および北緯 28.5 度に沿った太平洋での東西断面で描き出したものである。一般に内部重力波の振幅は成層の強い上層で大きく、中層にモード番号に対応した数の節をもつため、減衰率についてもそのことを反映した構造が見られる。

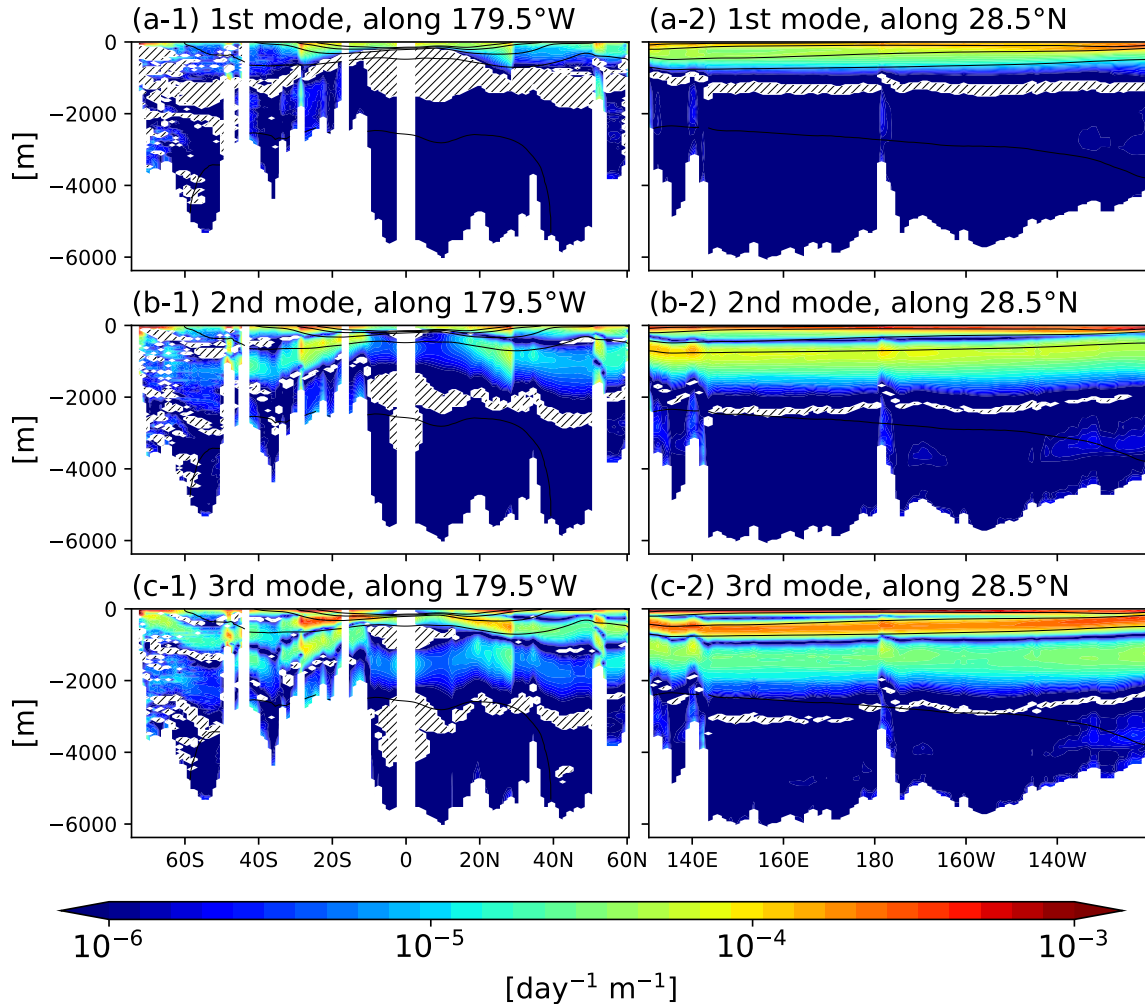


Fig. 7 Vertical cross sections of interaction intensity ν' depicted along (left) 179.5°W and (right) 28.5°N for the lowest three modes of M_2 internal tides. Note that ν' is either positive or negative, and only positive values are displayed. The black curves show the isopycnal surfaces with an interval of 0.5 kg m⁻³. Reproduced from Onuki and Hibiya (2018). ©American Meteorological Society. Used with permission.

北緯 28.5 度の結果を東西に積算すると、いずれのモードにおいても海面から 1,000 m 以内での相互作用が減衰率に対して 8 割以上の寄与を示していた。鉛直低次モードの内部潮汐が海洋上層に集中して PSI を起こすことは過去の数値実験でも示されており、Hazewinkel and Winters (2011) は上層で生成された近慣性内部重力波のエネルギーの幾分かはその後深層へと下方伝搬することを報告した。混合強度分布の定量化に向けては、PSI で生じた高波数擾乱のその後の発展についても詳細に調べる必要がある。

ここで付記すべきこととして、本稿で示した筆者らの計算では、内部潮汐と相互作用する背景波スペクトルを基本の GM スペクトルに固定している。現実の海洋では、内部重力波のスペクトルの形状とエネルギーレベルは海域によって著しく変化するため、Onuki and Hibiy (2018) の計算結果をそのまま内部潮汐のエネルギー収支の計算に用いることは適切ではない。その後の研究として、Olbers *et al.* (2020) は背景内部波のエネルギー密度をアルゴフロートによる観測データから推定し、それを用いて内部潮汐の減衰率を改めて計算した。彼らの結果においても、中低緯度における PSI の重要性が再確認されている。

その他の留意点として、ここで用いた鉛直モード展開による WKE では、その導出にあたって各モード波の位相の相関が十分弱いことを前提としているが、この近似の妥当性には議論の余地がある。特に内部潮汐が励起される地形の近傍では、モード波の位相の相関が顕著となる。この問題に関し、内部潮汐がその励起源近くで起こす共鳴不安定について、第 4 節で改めて触れる。

3.3. 内部潮汐が起こす PSI の成長率

上記の WKE に基づく解析では、PSI による内部潮汐の「減衰率」を算出した。一方、海洋物理学の多くの問題において、不安定の強弱を議論する際にその尺度とするのは、擾乱の「成長率」である。すなわち、減衰率は内部潮汐のエネルギー E_T が $E_T \propto e^{-\gamma t}$ という形で指数的に減衰することを表すのに対し、不安定成長率（以降は λ と書く）は擾乱である近慣性内部重力波のエネルギー E_I が $E_I \propto e^{\lambda t}$ と成長することを想定して算出される。こうして定義される 2 つの指標 γ と λ は、いずれも時間の

逆数の次元をもち、PSI の議論においてしばしば混同されるが、本来は異なる概念である。内部潮汐の散逸率分布を決めるのは減衰率であるが (de Lavergne *et al.*, 2019), 波動間相互作用による内部潮汐の減衰は背景波擾乱のエネルギー密度に依存し、その大きさは擾乱の成長率と関係するものと考えられる。

PSI に関する 2 つの指標 γ と λ のうち、 γ の理論的算出には WKE が含む複雑な波数積分の計算が必要であるため、具体的にその値を調べた研究例は限られる。それに対し、 λ は一般に線形安定性解析で調べることができ、PSI を含む内部重力波の不安定について成長率の値を計算した文献は無数に存在する。

内部重力波が起こす不安定の成長率を調べる最も標準的なやり方は Floquet 理論に基づく計算である。この方法では、背景場として単一の周波数をもつ内部重力波を想定し、そこに重ねられた擾乱の時間発展が周期関数と指数関数の掛け合わせで表現できることに基づいて、固有値問題に落とし込んで λ を得る。背景場である内部潮汐のエネルギー密度 E_B が小さい場合、粘性を無視すると PSI を通じて発達する擾乱の最大成長率は $\lambda \propto \sqrt{E_B}$ に従う。この結果は前節の方程式 (2-2) を用いても確かめることができる。

一方、Floquet 理論とは全く異なる方法で PSI の成長率を調べた研究も存在する。McComas and Müller (1981) は、連続的な周波数スペクトルをもつ海洋内部波場を想定し、WKE に基づいて共鳴不安定の成長率を定式化した。この方法では、背景場のエネルギー密度 E_B に対して $\lambda \propto E_B$ が成立する。Floquet 理論の結果と比較すると、背景場のエネルギー密度と不安定成長率を結びつける冪乗則が異なっている。

そもそもとして、Floquet 理論では背景場が単一の周波数成分で構成されることを前提としているのに対し、WKE は無数の周波数成分を含む弱非線形乱流場を対象とした方程式であるので、両者の結果は必ずしも一致する必要はない。しかし、ここで問題になるのは、背景場が両者の中間的な状態、つまり特定の周波数成分を中心とした狭い帯域にエネルギーが集中している場合である。狭いながらも連続的なスペクトルをもつ波動場であれば、WKE に基づく計算が有効に思える。その場合、スペクトル幅を狭めていくと単一周波数の状況に漸近するため、

WKE で算出される不安定成長率は Floquet 理論の結果に帰着することが期待される。しかし、既に述べたように成長率が従う乗則が異なるために双方の理論の結果が一致することはない。さらに言えば、WKE から導出される成長率の式は、背景場のスペクトル幅が 0 の極限で無限大に発散してしまう (Polzin and Lvov, 2011)。

3.4. 内部潮汐の周波数変調が PSI へ与える影響

現実の海洋においては、天体が引き起こす順圧潮汐はほぼ完全な周期性をもつ。しかし、地形上でひとたび発生した内部潮汐は、ゆっくりと変動する準地衡的な渦流との干渉によって周波数変調を起こすことが知られる。例として Alford and Zhao (2007) はハワイ海嶺北部での係留系データを分析し、内部潮汐が数百 km を伝搬する過程で、その位相が $\pm 45^\circ$ 変動することを示している。一般に、天文潮との位相同期を失った内部潮汐成分は衛星海面高度計からの測定が難しく、その時空間分布が十分に把握できていない。そのため、数値モデルを用いて非周期的 (“incoherent”) な内部潮汐の構造を調べる研究が近年活発化している (例: Lahaye *et al.*, 2024)。渦流との干渉で生じる内部潮汐の非周期性が PSI へ与える影響を理解するためには、周波数変調を伴う内部重力波の安定性解析が必要となる。しかし、変調によって有限のスペクトル幅をもつようになった内部重力波場が起こす不安定は、Floquet 理論と WKE のいずれの方法でも正しく調べることができない。そこで、既存の WKE の枠組みを拡張して内部潮汐の周波数変調が PSI へ与える影響を議論したのが Onuki and Hibiya (2019) である。

弱非線形乱流の標準的な理論モデルである WKE は一般に、連続媒質の運動を支配する基礎方程式 (成層流体では Boussinesq 近似を施した Euler 方程式) からいくつかの近似や仮定を経て導かれる。代表的には「弱非線形近似」と「乱雑位相近似」があり、前者は方程式の非線形項が小さいものとして摂動展開による逐次的な線形方程式の記述を可能にし、後者は波数の異なる成分間の位相相関が小さいとして、統計平均方程式のクロージャとして機能する。これらのうち、弱非線形近似は Floquet 理論において背景波振幅を微小とする極限とも整合し、PSI の文脈において共通して用いられる。一方、「乱雑位相近似」は言わば WKE の “Achilles’ heel” と

して、しばしば批判の対象となる。例として Young *et al.* (2008) は、乱雑位相近似によって WKE が PSI の効果を過小評価すると考えた。しかし、WKE から予想される PSI の成長率が、スペクトル幅が 0 の極限で無限大になる (大幅に “過大評価” する) ことを踏まえると、彼らの議論はややミスリードであると言えよう。

弱非線形近似と乱雑位相近似のほか、WKE の導出には「マルコフ化近似」が用いられている。この近似は、それぞれの波の位相の時間相関が十分短く、共鳴相互作用が時間軸で局所的に生じるとする仮定である。しかし、内部潮汐のような周期性の強い波が関与する共鳴相互作用において、位相の時間相関を短いとするのは不自然である。そこで、筆者らは WKE に代わる理論モデルとして、弱非線形近似と乱雑位相近似は採用しつつ、マルコフ化近似を用いない方程式系

$$\frac{\partial n_1}{\partial t} = \text{Im} \int (V_{123} J_{123} \delta(k_1 - k_2 - k_3) - 2 V_{213} J_{213} \delta(k_2 - k_1 - k_3)) dk_{2,3} \quad (3-3)$$

$$J_{123} = i \int_0^t e^{i(\omega_1 - \omega_2 - \omega_3)(t-t')} V_{123}^\dagger (n_2(t') n_3(t') - n_1(t') n_3(t') - n_1(t') n_2(t')) dt'$$

を導入した (ここで $V_{123}^\dagger$ は V_{123} の複素共役であり、上記の方程式では原著論文のものを簡略化して非共鳴項を省略している)。なお、このモデルは、強非線形乱流の研究で歴史的に重要な直接相互作用近似方程式 (direct interaction approximation: DIA, Kraichnan, 1959; 後藤, 1998) において、非線形の応答関数を線形波の応答関数に置き換えたものに相当する。内部重力波の強非線形的な相互作用を議論するために WKE を DIA に基づき拡張する試みは古くから存在したが、具体的な計算の際にはマルコフ化近似を含むいくつかの仮定を導入することが常であった (Polzin and Lvov, 2011)。それに対し筆者らは、弱非線形性は保持しながらマルコフ性を排した方程式系 (3-3) を用いることで、狭い周波数帯域で起こる PSI を矛盾なく説明することを目指した。

さて、方程式 (3-3) において未知変数を背景成分と擾乱成分に $n = N_B + n'$ と分離し、 $N_B(k)$ が方程式の定常解であると仮定して、 n' について線形化された方程式を導く。その安定性を調べるため、まず背景成分 N_B は特

定の波数 k_B に集中した構造をもつと考える。次に擾乱成分 n' は共鳴条件の式 (2-1) において $k=k_B$ とした時の一対の解 (k_1, k_2) に集中した構造をもつ指数成長解であると仮定する。すなわち、 $n'=e^{\lambda t}(N_1(k)+N_2(k))$ において方程式に代入し、時間積分を無限の過去から現在に至るまで (つまり $-\infty < t' \leq 0$ の区間で) 実行すると、 k_1 と k_2 の近傍における擾乱スペクトル N_1 と N_2 を固有関数、成長率 λ を固有値とした積分方程式が導かれる。この方程式は WKE から導かれる式とは異なり、たとえ N_B が単一の波数にデルタ関数型のピークをもっていたとしても破綻しない。よって、単一周波数で構成された背景波に対しても有限の不安定成長率を得ることができる。

本稿では単純な問題設定として一次元の波数空間を考える。その上で、背景波の action 密度を N_0 、半値幅を μ_k として、背景スペクトルの関数形を具体的に

$$N_B(k) = \frac{2N_0}{(k - k_B)^2 + \mu_k^2}$$

とすると、詳細は割愛するが、正の実固有値として近似的に

$$\lambda = \frac{-\mu + \sqrt{\mu^2 + 4CE_B}}{2} \quad (3-4)$$

が導かれる。ここで、パラメータを

$$\mu \equiv \left| \frac{\partial \omega}{\partial k} \right|_{k_B} \mu_k, \quad C \equiv \frac{8\pi |V_{123}|^2}{\omega(k_B)}, \quad E_B \equiv \omega(k_B) N_0$$

と定義した。このうち、 μ は背景波の周波数スペクトルの広がり、 C は非線形結合係数と周波数で決まる定数、 E_B は背景波のエネルギー密度を表している。式 (3-4) はスペクトル幅 μ の大小で 2 種の漸近形をもち、 $\mu \ll \sqrt{CE_B}$ では $\lambda \sim \sqrt{CE_B}$ 、 $\mu \gg \sqrt{CE_B}$ では $\lambda \sim CE_B/\mu$ となって、成長率と背景波エネルギー密度の間に 2 つの冪乗則を示す。この結果より、拡張された理論モデル (3-3) を用いて導かれた PSI の不安定成長率 (3-4) は、従来の Floquet 理論と WKE から導かれる 2 種の結果を連続的に接続する統一解であると解釈できる。Fig. 8 には、(3-4) の関数形を描くとともに、乱雑位相近似によるクロージャを用いないで計算した数値実験で得た値を示している (この図で ϵ は背景波の振幅を表し、 ϵ^2 が本文の E_B と対応する)。この結果では理論値と実験値がよく一致している。Fig. 8b の横軸に用いたパラメータ μ_k は背景波の変調の強さを表す。よってこの図は、内部潮汐が非周期性を有することで PSI が弱化する効果を定量的に示すものである。

ところで、本稿で触れてきた弱非線形乱流における WKE は、海洋学では内部重力波よりも表面重力波の分

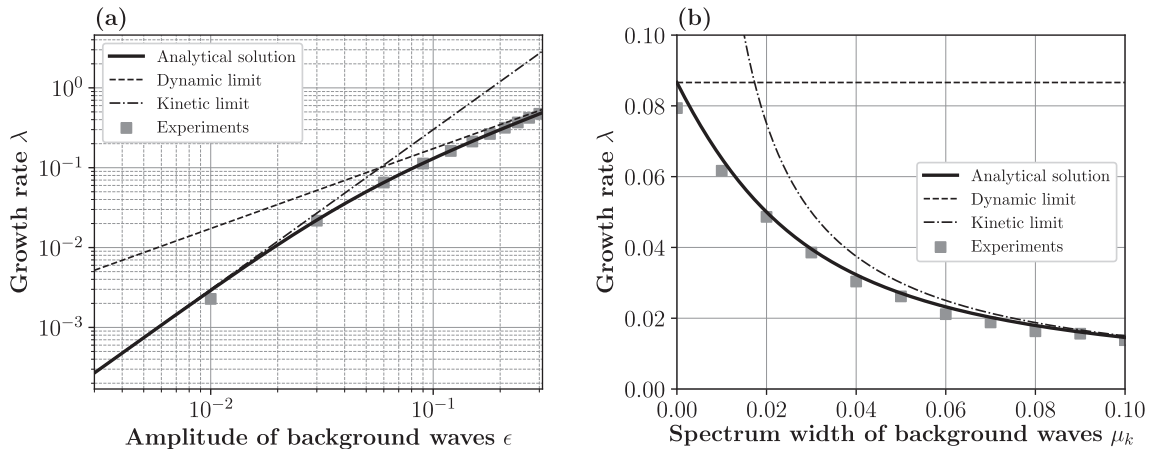


Fig. 8 Growth rates of the expectation value of the energy density for the model equation versus (a) the amplitude of the background wave ϵ with a fixed spectrum width $\mu_k = 0.02$ and (b) μ_k with a fixed $\epsilon = 0.05$. The gray squares indicate the empirical values obtained from numerical experiments. The solid black curves show $\lambda = (-5.0\mu_k + \sqrt{(5.0\mu_k)^2 + 1.732\epsilon^2})/2$, which corresponds to Equation (3-4), whereas the broken curves correspond to the two asymptotic limits. Reproduced from Onuki and Hibiya (2019). Used with permission.

野で広く認識されている。表面波の分散関係は三波共鳴の条件を満たさず、四波共鳴によるエネルギー輸送が支配的となる。表面波を対象とした WKE は、古くは Hasselmann (1962) によって導かれ、それを簡略化した計算式が波浪スペクトルの時間変化を予測する数値モデルで広く用いられている (Tolman, 2009)。表面波の文脈においても、WKE の背後にある統計的仮定の妥当性については度々議論がなされてきた。最たる理由として、狭い周波数帯域に集中した表面波列は自発的に変調を起こすことが知られるが (Benjamin-Feir 不安定)、この現象は WKE の枠組みでは正しく説明ができない。変調による不安定は巨大波の発生に関わる現象であるため、その理解は海洋学において極めて重要である。このことを動機として、Janssen (2003) は WKE を拡張した理論式を新たに導入するとともに、表面波の変調の強さを表すパラメータとして Benjamin-Feir index (BFI) を定義して、BFI の大小に応じた理論予測の妥当性を議論した。一方の内部重力波においては、本稿の (3-4) 式から無次元数として $\sqrt{CE_B}/\mu$ が定義され、これは三波共鳴系における BFI ともみなすことができる。表面波研究ではさらに、突発的な大気擾乱に対する波浪スペクトルの応答を扱うため、Janssen とは異なる方式で WKE を拡張した一般化運動論方程式が提案されている (Annenkov and Shrira, 2006; 2015)。この方程式の導出は、スペクトルの急激な時間変化を考慮に入れるためにマルコフ性の仮定を除外するという発想に基づいており、内部重力波における (3-3) 式と対応関係がある。このように、WKE にまつわる表面波と内部重力波の議論は密接に関係しており、相互の情報交換を経て今後ますます理論研究が発展することが期待される。

4. 局地的な潮汐混合の理解に向けて

近年の海洋モデル研究では、潮汐エネルギーに起因した海洋の乱流混合のうち、内部重力波の発生源近くで起こる局地的な混合と長距離を伝搬する内部重力波が起こす遠隔混合を区別して扱うことが一般的である (例: de Lavergne *et al.*, 2020)。これらのうち、前節では主に遠隔混合に関わる長波長の内部潮汐の共鳴不安定を議論した。その際、三波共鳴を統計的に記述するスペク

トルの時間発展式の導出のため、相互作用に関与する内部重力波の振幅が微小であること、各波数成分の位相が統計的に独立であることを用いた。これらの仮定は、局地的な混合をもたらす内部潮汐成分に対しては妥当と言えない。

4.1. 内部潮汐ビームの不安定

一般に、海底地形上を通過する潮汐振動流が発生させる内部重力波は、地形の構造に依存してさまざまな形態をとる。特に線形の分散関係式で定められる内部潮汐の波面の傾きと一致する斜面が存在する場合、その近傍で極めて強い流速を伴う波が発生し、高い指向性をもってエネルギーが放射される (Balmforth and Peacock, 2009)。こうした「ビーム型」の内部重力波は、周波数と位相の揃った無数の波数成分が重なり合って構成される。よって、ビーム波の共鳴不安定を議論するにあたり、乱雑位相近似に基づく WKE を用いることは適切でない。

ビーム型の内部潮汐が引き起こす乱流混合は世界中の海域で報告されており、そこには何らかの不安定機構が関与しているものと考えられる。正弦波やモード波の場合と同様、ビーム型の内部潮汐も PSI を生じ得ることは、室内実験や漸近解析の方法で 2010 年代の中盤ごろまでに調べられてきた (Bourget *et al.*, 2014; Karimi and Akyas, 2014)。一方、現実の海洋においては、臨界緯度よりはるかに極側においても内部潮汐ビームの伝達経路に沿った高い乱流散逸率が計測されている (Fig. 9, Lien and Gregg, 2001)。よって、ビーム型の内部重力波が起こす局地的な乱流混合を正確に理解するためには、微小振幅理論に基づく従来の PSI の枠組みを越えて波の不安定性を調べる必要がある。

歴史的に、有限振幅内部重力波の不安定は、一つの波数ベクトルで特徴付けられる単色の正弦波を対象として調べられてきた。単色の内部重力波の安定性は、波の位相進行と同速で移動する慣性系に座標変換をすることで、定常流の安定性の問題に帰着させられる。周期性をもつ系の固有状態を扱う Floquet の定理 (空間周期的な問題では「Bloch の定理」とも) を用いて、背景波に重ねられた擾乱の波数に応じた不安定成長率が算出される (例: Yau *et al.*, 2004)。一方、ビーム型の内部重力波は、正弦波と同様に非粘性かつ一様成層の条件で Bous-

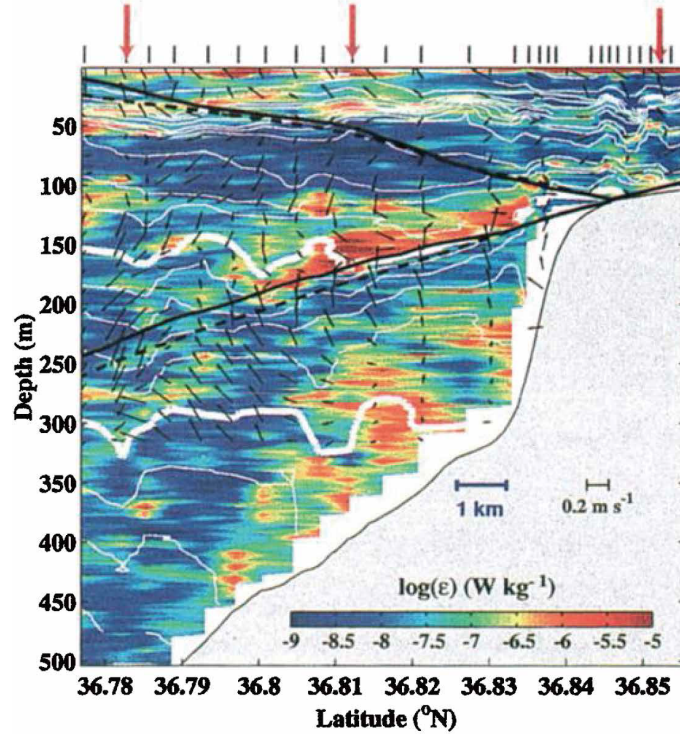


Fig. 9 Contours of turbulence kinetic energy dissipation rate ϵ during the first along-ridge section. Ticks at the top mark advanced microstructure profiler (AMP) drops, and white contour lines denote constant potential density σ_θ at intervals of 0.1 kg m^{-3} . The thicker white lines are $\sigma_\theta = 26.1$ and 26.6 kg m^{-3} . The ray path of the M_2 internal tide emanating from the shelf break was calculated using an averaged vertical profile of buoyancy frequency N (thick solid black curve) (equation (1)). The M_2 characteristics including the effect of a horizontal stratification $N_x = 10^{-4} \text{ s}^{-1}$ and a horizontal velocity gradient $\partial_x V = 10^{-5} \text{ s}^{-1}$ (equation (2)) are identical to the solid curve. The dashed black line denotes the M_2 characteristics including the effect of mean vertical shear of a magnitude of 0.001 s^{-1} (equation (3)). Black arrows represent acoustic Doppler current profiler (ADCP) horizontal velocity vectors. We have rotated the velocity vector so that the positive x component of velocity denotes the along-ridge onshore velocity and the positive y component velocity denotes the northwestward across-ridge velocity. The red arrows at the top mark locations of the profiles shown in Figure 2. Reproduced from Lien and Gregg (2001). Used with permission. The caption has not been modified from the original.

sinesq 近似方程式の厳密解となる (Tabaei and Akylas, 2003) が、空間周期性をもたないため座標系の変換で定常流の問題に置き換えることはできない。時間周期性のみを頼りにフーリエ分解して形式的に固有値方程式を導くことも可能ではあるが、一般に大規模な行列の計算が必要になるため、幅広いパラメータ領域で網羅的に安定性を調べることは困難である。こうした背景から、ビーム波の不安定を議論した先行研究では、擾乱について高々3つの周波数成分のみを取り出して不安定成長率を

算出していた (Kataoka and Akylas, 2013; 2015; Karimi and Akylas, 2014; 2017)。

大振幅の内部潮汐波が起こす不安定の性質を調べるべく、Onuki and Tanaka (2019) はデータ同化で用いられる状態遷移行列の概念を参考に、従来の解析とは異なる計算法を導入した (Fig. 10)。その内容として、まずビーム波を背景場としてそこに重ねられた無限小擾乱の時間発展式を (2-2) の形に表し、フーリエ級数展開の方法で離散化をすると、一組の常微分方程式が形式

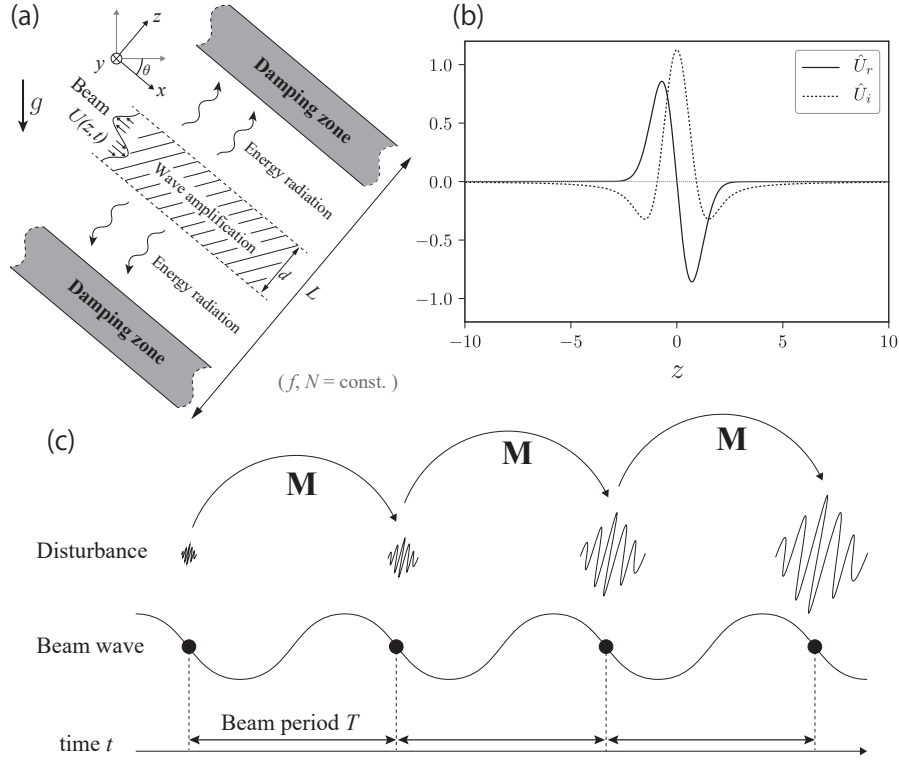


Fig. 10 (a) Model geometry. A beam wave propagates in a rotating stratified fluid at an angle θ to the horizontal. The coordinates (x, y, z) correspond to the lengthways, vertical transverse, and horizontal transverse directions of the beam, respectively. The beam structure is specified by a temporally varying velocity function $U(z, t)$ with a characteristic width d . The infinitesimal disturbance wave is amplified via interaction with the background beam and radiated away until it reaches the damping zones located near the boundaries. (b) Real and imaginary parts of the beam structure function $\hat{U}(z)$. (c) Concept behind Floquet theory. The evolution of the disturbance over one period of beam oscillation T is regarded as a linear transform represented by M , the monodromy matrix. Reproduced from Onuki and Tanaka (2019). Used with permission.

的に $d\psi/dt = A\psi$ と書ける。ここで、 ψ は未知変数で構成される状態ベクトルであり、 $A(t)$ は時間に依存した行列である。任意の初期条件 $\psi|_{t=0} = \psi_0$ に対する一般解は、 $\psi(t) = \Phi(t)\psi_0$ と、時間に依存した行列（状態遷移行列） Φ を用いて書くことができる。さらに、方程式の係数行列 A は、背景場のビーム波の周期を T として、 $A(t+T) = A(t)$ と時間周期的になることから、Floquet の定理より、状態遷移行列は任意の整数 n に対して $\Phi(nT) = \Phi(T)^n$ を満たす。すなわち、系の長期的な時間発展は、一周期分の状態遷移行列 $\Phi(T)$ ($=M$: モノドロミー行列) によって決定されることになる。筆者らの研究では、この行列を数値的に構成してその固有値を基に擾乱の不安定成長率を算出した。

ビーム波の振幅 (A) と周波数 (σ) を変化させながら擾乱の最大成長率を調べてプロットした結果が Fig. 11 である。振幅 A が小さい場合、不安定成長率は $f/\sigma = 0.5$ で最大値を取り、それよりも高緯度側では不安定は生じない。これは PSI の基本的な性質を反映している。なお、ビーム波では正弦波に比べて成長率の緯度依存性が顕著であり、幅の狭いビームにおいては粘性を考慮すると PSI の臨界緯度付近でのみ不安定が生じるということが指摘されている (Karimi and Akylas, 2017; 片岡, 2018)。これは、不安定で発生した擾乱は固有の群速度をもち、時空間を伝達してやがてビーム波との干渉を失うことによる。臨界緯度の近傍では、不安定で生じる近慣性の擾乱は群速度が小さくその場に留まり続けるため

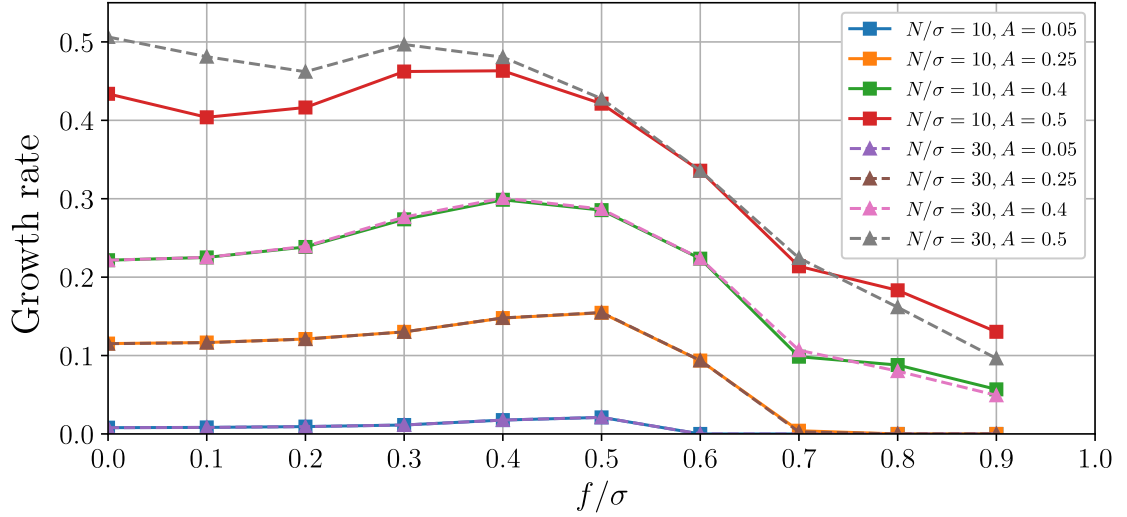


Fig. 11 Growth rate of the fastest growing mode plotted against f/σ for each combination of N/σ and beam amplitude A . All data are scaled with a beam frequency σ . Reproduced from Onuki and Tanaka (2019) with some modifications. Used with permission.

持続的に成長しやすくなる。このように擾乱の群速度の大きさが臨界緯度の特異性に関与するということは、 β 面上を長距離伝搬する低次モード波においても議論されている (MacKinnon and Winters, 2005)。

振幅 A を大きくすると、臨界緯度よりも極側 ($f/\sigma > 0.5$) でも不安定を生じるようになる一方、成長率が最大となる緯度帯は赤道側へシフトする。こうした性質はよく知られた PSI とは著しく異なる。成長する擾乱の周波数スペクトルを調べると、 A が十分小さい場合には通常の PSI の性質に従ってビーム波の半分の周波数成分が卓越するが、振幅 A を大きくしていくと、はるかに高周波の成分が生じるようになる (Fig. 12)。これは、ビーム波がもつ流れによって高波数擾乱がドップラー効果を受けるためと解釈できる。なお、擾乱に作用する粘性が小さい場合、ビーム振幅 A が小さい状況であっても高波数の擾乱が高い周波数成分を伴って不安定を起こす。この種の不安定は、背景波の流れに乗った変形座標系を導入してドップラー効果を形式的に消去すると、PSI と同様に三波での共鳴不安定に帰着することが後の研究で指摘された (Fan and Akylas, 2021a)。背景波の振幅が大きい場合は、時間変動座標系を導入しても一般に高調波の寄与は無視できない。

ところで、大振幅の内部重力波が起こす不安定として

は、Kelvin-Helmholtz (KH) 不安定に代表されるシア不安定がある。一般に成層流体のシア不安定は Richardson 数 Ri が $Ri < 1/4$ の条件を満たすときに生じ得るとされるが、ここで示した計算ではすべて $Ri > 1/4$ としている。すなわち、本稿では従来型の PSI とシア不安定が起こるとされる 2 種のパラメータ領域の狭間、中程度の振幅の内部潮汐ビームの不安定を対象に議論をした。このパラメータ範囲では、KH 不安定のような急激な乱流生成は起こらないものの、背景の内部潮汐に比べて高周波の内部重力波が自発的に生じ得るものと解釈できる。近年、係留系データや高解像度海洋モデルを用いた研究において、内部重力波の低周波成分から高周波成分への顕著なエネルギー変換が報告されている (Sun and Pinkel, 2012; Yang *et al.*, 2022; Skitka *et al.*, 2024)。ここで示した不安定機構がそうした実在の現象を説明し得るのか、また潮汐混合には定量的にどの程度の寄与をするのか、今後のさらなる調査が待たれる。

4.2. 乱流混合のエネルギー効率

内部潮汐が共鳴不安定を通じて擾乱波を発生させる機構についてここまで述べてきた。一方、潮汐がもたらす混合を定量的に理解するためには、不安定で生じた擾乱エネルギーがその後どのようにしてさらに微細な乱流エ

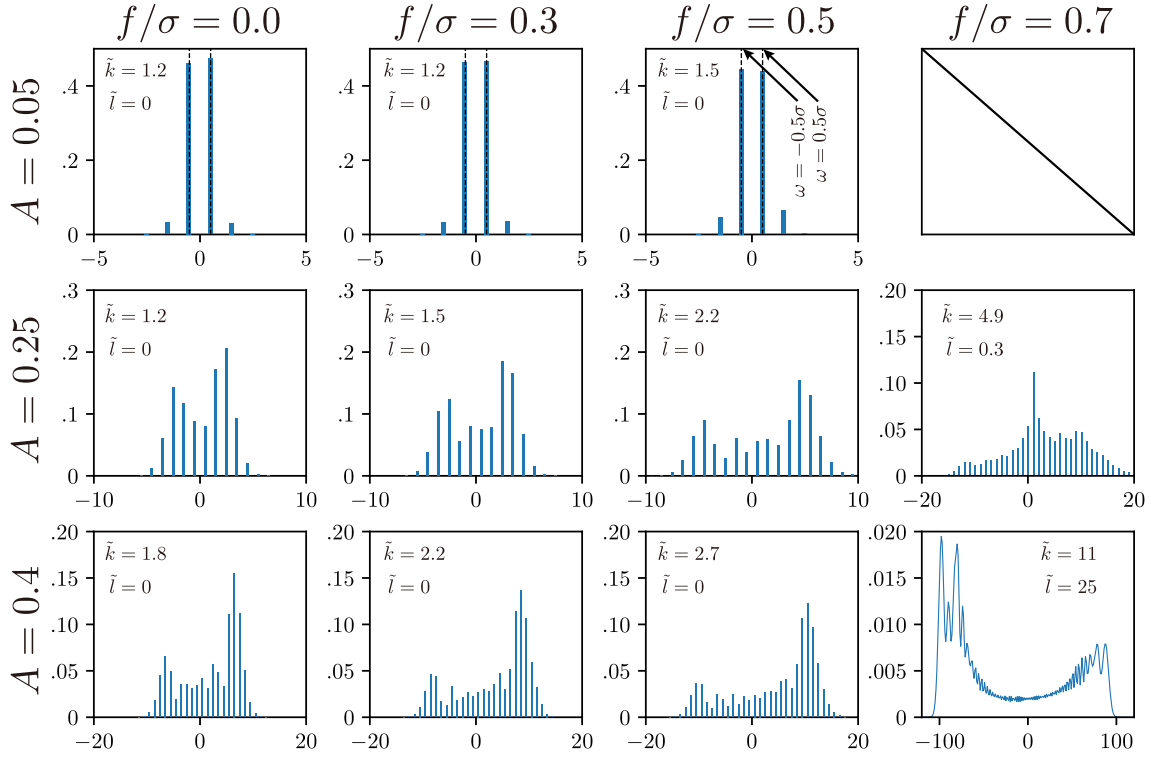


Fig. 12 Frequency spectra of the fastest-growing mode for beam amplitude $A = 0.05, 0.25, 0.4$ and $f/\sigma = 0, 0.3, 0.5, 0.7$ with $N/\sigma = 10$. The corresponding wavenumbers are also shown in each panel. The horizontal axis is scaled with the beam frequency σ , and the total energy is normalized to unity. One panel is shown as a continuous plot for visibility, but all of the spectra are inherently discrete with an interval σ . In the top panels, the black broken lines indicate the subharmonics of the beam frequency, $\pm 0.5\sigma$. Reproduced from Onuki and Tanaka (2019) with modification. Used with permission.

エネルギーへと転化し、不可逆的な海水混合を引き起こすのかを明らかにする必要がある。ここで一つの焦点となるのが、乱流混合のエネルギー効率である。一般に、圧縮性の弱い (Boussinesq 近似と線形状態方程式が成立する) 密度成層流体において乱流エネルギーが散逸する際、粘性散逸による運動エネルギー (KE) から熱エネルギーへの変換 (ϵ) と、熱伝導や分子拡散による有効位置エネルギー (APE) から背景位置エネルギーへの変換 (ϵ_p) が起こる (Winters *et al.*, 1995)。両者の変換率の比 $\Gamma = \epsilon_p/\epsilon$ は混合係数と呼ばれ、乱流混合のエネルギー効率を表す指標となる。この混合係数は、乱流計測機器で取得されるエネルギー散逸率を鉛直拡散係数へ読み替える際に用いられる重要なパラメータであり、その値の正確な推定は鉛直拡散が関わる海洋学のあらゆる場面において決定的に重要である (Gregg *et al.*, 2018)。

歴史的に、海洋内部領域では $\Gamma = 0.2$ が広く成立するとされてきた。しかし、現実の海洋において Γ の値は海域や深さによって著しく異なる (Ijichi and Hibiya, 2018; Ijichi *et al.*, 2020)。数値シミュレーションや水槽実験の結果からは、混合のエネルギー効率は乱流の成因に依存して変化することが分かっている。例を挙げると、安定成層状態を起点に水平流のシア不安定や外部からの運動量強制で生成される乱流では時間積算したエネルギー収支において概ね $\Gamma \leq 0.5$ となるが (Garanaik and Venayagamoorthy, 2019; Caulfield *et al.*, 2021)、静止した不安定成層状態から対流運動で生成される乱流では Γ が 1 を越えることもある (Davies Wykes and Dalziel, 2014)。これらの結果は、KE と APE の両者がこういった比率で乱流生成に寄与するかが Γ に反映されるものと解釈できる。とすれば、現実の海洋において乱

流を生成する内部重力波は KE と APE を同時に保持するため、混合のエネルギー効率にはシア不安定と対流不安定の中間的な値になるのではないかと期待される。このことを数値実験で確かめたのが Onuki *et al.* (2021) である。

4.3. 共鳴不安定の直接数値シミュレーション

筆者らは、内部重力波が共鳴不安定で励起した擾乱が砕波することで引き起こされる乱流混合を定量的に理解することを目指した。本稿で既に見たように、共鳴不安定を調べるには線形安定性解析や弱非線形乱流といった摂動法に基づくアプローチが有効だが、強非線形的な混合現象の理解のためには、乱流の直接数値シミュレーションが必要となる。その際に問題となるのが、内部重力波と乱流のスケールギャップである。通常、共鳴不安定を生じる内部潮汐は、励起源に近い場所であっても数百 m 程度の波長をもつ。一方、混合に関わる乱流の散逸スケールは 1 cm 以下である。よって、現象全体を 1 つの数値モデルに収めるためには、一方向に数万もの計算格子点数が必要となる。これは、最新の並列計算機をもってしても極めて困難な課題である。過去に PSI による内部重

力波の散逸と密度混合を直接数値シミュレーションで扱った研究として Bouruet-Aubertot *et al.* (2001) があるが、解像度の不足により、混合係数について確かな見積もりは得られていなかった。

内部重力波がもたらす乱流混合という、極めて幅広い空間スケールにまたがる物理現象を数値的に解析するため、筆者らは計算領域の周期変形という新しい計算手法を導入した (Fig. 13)。その基本的な考え方として、まず一様に密度成層した流体を伝わる平面内部重力波を背景場として想定し、この背景波の波長よりも十分に小さな平行六面体の流体要素に注目して、この要素が背景波がもつ流れによって周期的に変形を受けると考える。次に、背景場の内部重力波に重ねられた有限振幅の擾乱を考え、その擾乱が六面体要素の内部において周期境界条件を満たすものと仮定する。すると、この要素内における擾乱の時間発展は、領域の変形とともに運動する座標系において空間座標には陽に依存しない形式となり、古くからある一様剪断乱流の計算 (Rogallo, 1981) に倣ってフーリエ・スペクトル法による数値解析が可能となる。

通常の固定座標系を用いて同種の問題を議論しようとした場合、モデル領域の大きさは最低でも背景波の一波

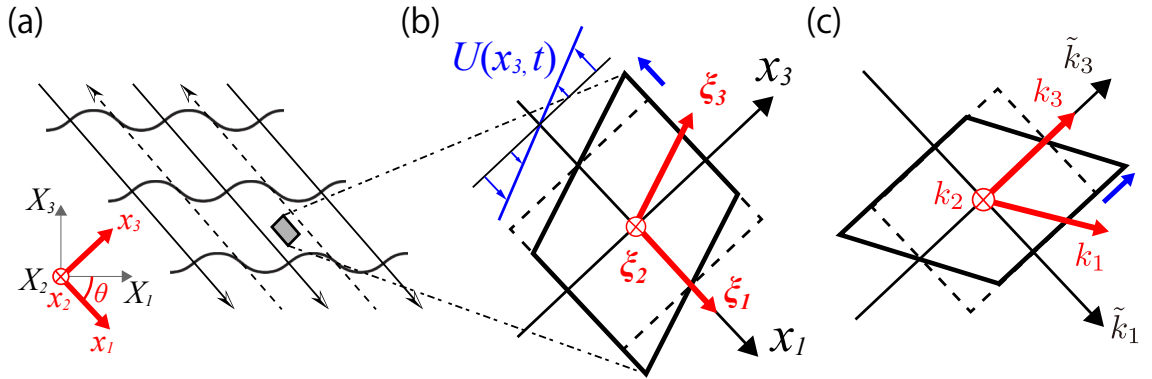


Fig. 13 (a) Internal gravity wave obliquely propagating in a stratified fluid. The thick black curves represent the isopycnal surfaces, and the arrows indicate the direction of the flow velocity. A Cartesian coordinate system (x_1, x_2, x_3) is arranged such that x_1 points to the direction of the flow velocity, x_3 to the velocity gradient, and x_2 perpendicular to them. (b) We cut out a small domain from the internal wave field, in which the velocity U is linear in x_3 and oscillates in time. A time-dependent coordinate system (ξ_1, ξ_2, ξ_3) that follows the background flow velocity is introduced. The shape of the model domain (thick parallelogram) is fixed in the ξ frame and hence periodically distorted. (c) The wavenumber coordinates (k_1, k_2, k_3) , which are defined by taking the Fourier transform with respect to (ξ_1, ξ_2, ξ_3) , also vary with time. Reproduced from Onuki *et al.* (2021). Used with permission.

長分を解像できるように設定する必要がある（例：Fritts *et al.*, 2009a, b）。一方、ここで導入した変形座標系を用いる方法では、モデル領域の大きさは背景波の波長よりもはるかに小さく設定することができる。大まかな見積もりとして、背景場を波長 100 m の内部重力波とし、モデル領域の初期の形状を一辺が 10 m の立方体とすれば、一方向に $\sim 10^3$ 個程度の格子点数で深海に

おける乱流のコルモゴロフ長まで解像できるようになる。

単純な設定として非回転系を想定すると、背景波の最大流速シアと背景浮力振動数の比として定義される Froude 数 (Fr) が主要な実験パラメータとなる。格子点数を 1024^3 、擾乱場の初期条件はホワイトノイズとし、 $Fr=0.4$ で計算した実験の結果を Fig. 14 に示す。計算開始とともに粘性によって急速にエネルギーが失われる

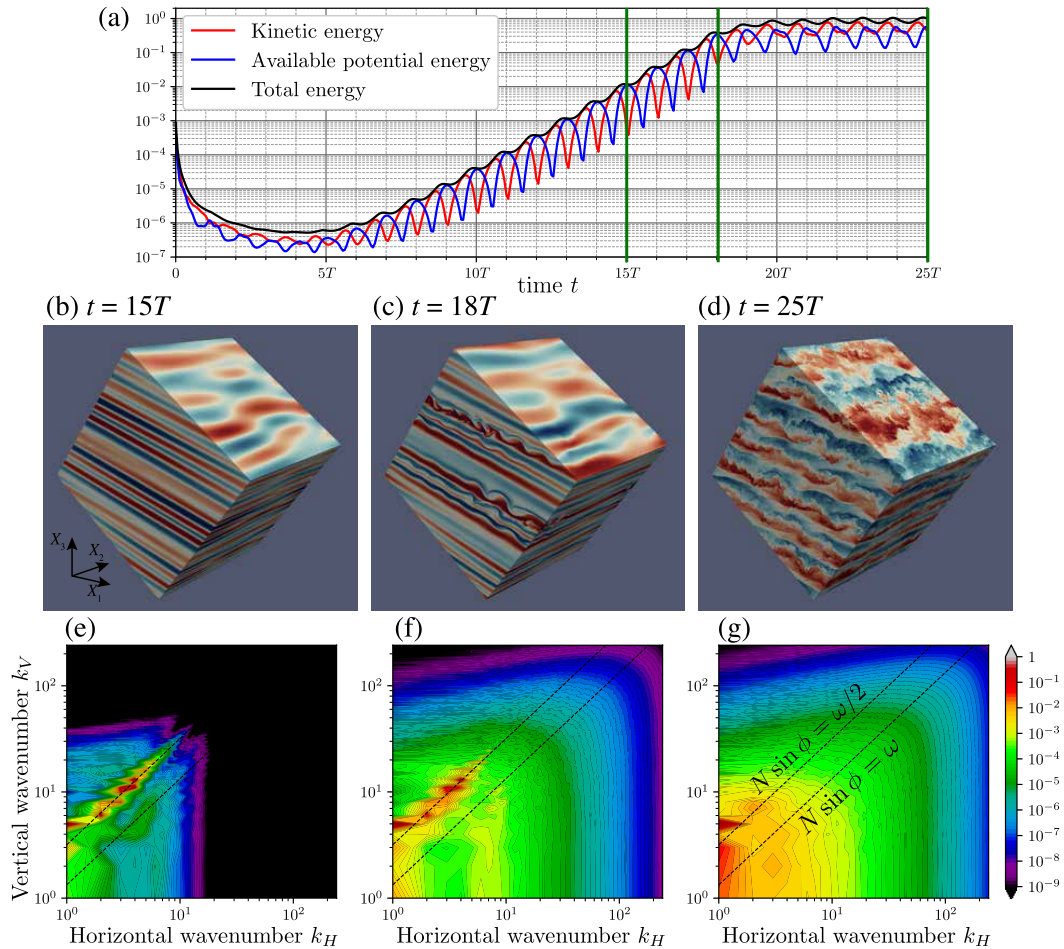


Fig. 14 Results of the experiment with $Fr = 0.4$. (a) Time series of the kinetic energy (red), available potential energy (blue), and their sum (black). The data are normalized such that the total energy becomes 1 at the end of the experiment. The vertical green lines indicate $t = 15T$, $18T$, and $25T$, the times to which the subsequent panels correspond. (b)–(d) Buoyancy perturbation b' on the surface of the calculation domain at $t = 15T$ (b), $18T$ (c), and $25T$ (d). Red and blue regions indicate positive and negative values. (e)–(g) Energy spectra in the horizontal and vertical wavenumber space, $E(k_H, k_V)$, at $t = 15T$ (e), $18T$ (f), and $25T$ (g). Here, k_H indicates the wavenumber against the horizontal directions X_1 and X_2 , and k_V indicates that of the vertical direction X_3 . The spectra are integrated over the azimuthal angle and normalized such that $\int E(k_H, k_V) dk_H dk_V = 1$. The black dotted lines indicate $N \sin \phi = \omega$ and $N \sin \phi = \omega/2$, where ϕ is the angle of the wave vector with respect to the vertical axis. Reproduced from Onuki *et al.* (2021). Used with permission.

が、その後指数関数的なエネルギーの増大が見られ、ある時刻を過ぎると準定常状態に至る。擾乱のパターンとしては、エネルギー成長期には幅の不均一な縞模様の構造が見られ、エネルギーが飽和する時刻の直前に渦性擾乱の立ち上がりが見られ、その後乱流状態に移移する（より詳細な動画を Onuki *et al.*, 2021 の Supplementary materials で閲覧可能）。この結果において、エネルギーの指数増大と縞模様の形成は PSI によるものである。一方、エネルギー飽和に至る直前に見られる乱流生成では、シア不安定と対流不安定がほぼ同時に起こっていることが Richardson 数に基づく分析から判断される（図は省略）。筆者の知る限り、PSI を数値実験で確かめた研究は多いが、高 Reynolds 数条件での二次不安定から粘性散逸までを三次元計算で完全に再現したのはこれが初めてである。

同様の実験を背景波の Fr を 0.1 から 1.2 まで変化させて実施し、粘性による KE の散逸率と拡散による APE の散逸率の比から Γ の値を計算した。その結果、全ての実験において Γ は 0.5 から 1 の範囲にあった (Fig. 15)。さらに、擾乱のエネルギー収支において時間変動する背景波との干渉で生成される KE と APE を比べると、いずれの実験でも APE の生成量が KE の生成量を上回った。この 2 点を合わせると、背景波から供給される APE のうち一部が KE へ変換されて残りが密度混

合に消費されることになる。以上のことから、本実験で再現された内部重力波の共鳴不安定で起こる乱流混合は、シア不安定よりも対流不安定の状況に近く、それゆえ高いエネルギー効率が実現されるものと解釈される。

混合係数 Γ の値と背景波の Fr の間には明瞭な相関が見られた (Fig. 15)。先行研究においては、乱流場に対して定義される Froude 数 ($Fr_t \equiv \epsilon / (N\epsilon_K)$, ここで N は背景浮力振動数, ϵ_K は乱流運動エネルギー) に応じて Γ が変化することが議論されており (Maffioli *et al.*, 2016; Garanaik and Venayagamoorthy, 2019), 本研究の結果も概ねそれに沿っている。このスケーリングは深海の実測データ (Ijichi and Hibiya, 2018) とも整合する。しかし、上記先行研究のスケーリングは KE のみの供給によって駆動される混合を想定しており、対流不安定や本稿で扱った共鳴不安定のような背景場が APE を保持している状況における $\Gamma > 0.5$ となるような著しく高いエネルギー効率は説明できない。さらに、単独のシア不安定においても、乱流が生成された直後は極めて高い混合係数を示し、その後は時間経過につれて混合係数が連続的に減少していくという報告がある (Smyth *et al.*, 2001; Ijichi and Hibiya, 2018)。より実用的に、広域的な混合パラメタリゼーションに用いるべき Γ の値の選定においては、乱流の間欠性についても考慮に入れなければならない (Ijichi *et al.*, 2020)。海洋循環モデ

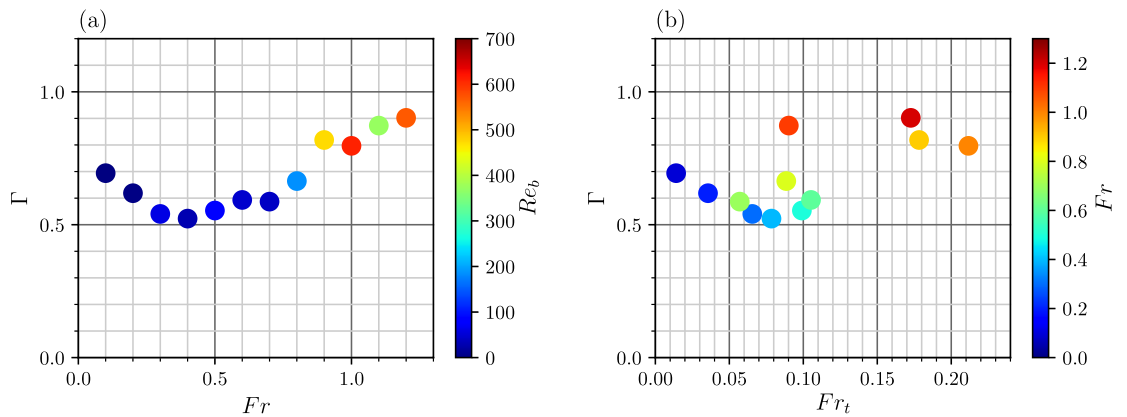


Fig. 15 (a) Mixing coefficient $\Gamma \equiv \epsilon_p / \epsilon$ as a function of the (external) Froude number Fr . The color represents the buoyancy Reynolds number $Re_b \equiv \epsilon / (\nu N^2)$. (b) Mixing coefficient Γ as a function of the turbulent Froude number $Fr_t \equiv \epsilon / (N\epsilon_K)$. The color represents Fr . Here, the energy dissipation rates ϵ and ϵ_p and the kinetic energy density ϵ_K are obtained by averaging each over $t_{end} - T < t \leq t_{end}$. Reproduced from Onuki *et al.* (2021). Used with permission.

ルの高精度化に向け、混合のエネルギー効率についてははっきりとした見解を得るためには、成層乱流の学問分野全体がより一層深化する必要がある。

ここで付記しておくべき点として、本小節に示した数値実験はコリオリ力を無視している。非回転系における内部重力波は、線形解において時間平均すると KE と APE は常に等分される。それに対し、回転系での内部慣性重力波は、周波数が低いほどエネルギー全体に対して APE の占める割合が小さくなり、慣性振動では APE は完全に消失する。よって、内部潮汐が臨界緯度で PSI を通じて生成する擾乱の碎波で引き起こされる混合では、 Γ の値は本稿に示した結果に比べてずっと小さくなることが予想される。本実験で用いた領域変形型モデルにコリオリ力の影響を組み込むことは容易ではあるが、その場合は計算時間が大幅に増えるとともに、不安定条件が複雑化して各種パラメータに対する混合係数の依存性を網羅的に把握することは難しくなる。現実的なパラメータ範囲において内部潮汐が起こす共鳴不安定による混合のエネルギー効率については将来研究の課題としたい。

5. 今後の展望

5.1. 内部波共鳴現象に関する研究動向

本稿で議論してきた PSI を始めとした内部潮汐の共鳴不安定について、近年の研究では背景流がもたらす影響について複数の異なる観点から議論がなされている。例えば Richet *et al.* (2017) は、地形上で励起される内部潮汐が移流によるドップラーシフトを受けることで、PSI の臨界緯度が南北にずれることを数値実験で示した。一方、Yang *et al.* (2018) は背景渦度の影響により「実効的な」慣性周波数が変化して同様に臨界緯度が移動する可能性を議論し、Yang *et al.* (2020) はその機構が東シナ海での流速データに見られる近慣性エネルギーの変動を説明し得ることを報告した。Fan and Akylas (2021b) は背景流の移流効果でビーム型内部重力波の不安定が弱められる機構を漸近解析で示し、さらに Akylas and Kakoutas (2023) は鉛直モード構造をもつ内部重力波においてもラグランジュ平均流が高波数擾乱の不安定を弱めることを報告した。直近の研究では

Wang *et al.* (2024) が現実的な海洋モデルを用いて東シナ海で黒潮が内部潮汐の PSI へ与える影響を調べている。以上のように、理論・観測・数値モデルのそれぞれで研究が盛んに進み、着実に理解が深まっていると言える。

一方、波動間の共鳴相互作用が乱流混合に果たす役割について、未だ定量的な理解が得られているとは言い難い。全球における内部潮汐のエネルギー収支の把握とそれによる潮汐混合パラメタリゼーションの構築を目指した de Lavergne *et al.* (2019; 2020) は波動間相互作用を通じて低次モード成分の内部潮汐が 521GW のエネルギーを失うと見積もった。しかしこの数字は、各モード成分のエネルギーが臨界緯度よりも赤道側と極側のそれぞれで一律の減衰時間でエネルギーを失うという、極めて粗い仮定に基づいている。近年はドイツにおいて、WKE に基づいた新しい趣向の海洋内部波モデルを開発する動きがあるが (IDEMIX: Pollmann *et al.*, 2017; Eden *et al.*, 2020; Olbers *et al.*, 2023; Brüggemann *et al.*, 2024), そこに用いられている近似や仮定の妥当性、具体的には WKE の適用範囲や GM に似せたスペクトル形状へのパラメータフィッティングが信頼に足るものであるか、慎重な議論が求められる。

PSI を通じて内部潮汐から生じた近慣性内部重力波 (近慣性波) のエネルギーが、その後どのように散逸に至るのかについても現状ではほとんど理解されていない。多くの観測研究では、近慣性波のエネルギー密度と乱流散逸率に相関があることが示されているが、このことから近慣性波がその場で散逸していると即座に結論付けることはできない。というのも、ファインスケール・パラメタリゼーションの観点では、乱流散逸率に直接寄与するのは鉛直スケール 10 m 以下のロールオフ領域で碎波する内部重力波であるとされる (Heney *et al.*, 1986; Ijichi and Hibiya, 2015)。それに対し、より大きなスケールの近慣性流は周囲の高周波数成分の重力波を屈折させて高波数側へのエネルギーカスケードを促す役割を果たす。シア流における wave action の保存則に基づけば、純粋な慣性振動の中を伝わる重力波が屈折によって碎波に至る場合、慣性振動は重力波のエネルギーの一部を受け取ってむしろ増幅することになる。近年では、既存のファインスケール・パラメタリゼーションの

背後にあるスケール分離の仮定の問題点を指摘し、WKEに基づくパラメタリゼーションを再興する動きもある (Dematteis *et al.*, 2024)。しかしその計算においても、内部重力波は慣性周波数に近づくほど減衰時間が長く安定であることが示されており、PSI で生じた数百 m の鉛直波長をもつ近慣性波の散逸機構は未解明のままである。

前節でも触れたが、係留系データの分析では、PSI で生じた近慣性波のエネルギーは鉛直波長の大きな高周波数重力波へ変換されることが示されている (Sun and Pinkel, 2012; Yang *et al.*, 2022)。さらに、同様の低周波数成分から高周波数成分へのエネルギー変換は最新の高解像度海洋モデルでも見出されているが、その詳しいメカニズムは明らかにされていない (Skitka *et al.*, 2024)。過去の理論研究を紐解くと、慣性振動から高周波数重力波へのエネルギー変換の仕組みとして、レイ・トレーシング方程式と一般化ラグランジュ平均理論を用いた説明がある (Broutman and Young, 1986; Broutman and Grimshaw, 1988)。この機構が近年の観測や数値実験の結果の解釈に結び付くのかについて、今後の調査が期待される。

5.2. 乱流混合の定量化に向けて

海洋中深層の混合をもたらす内部重力波のエネルギー源として、地形上を通過する潮汐流のほか、風強制によって上層に励起される慣性振動が重要であるという説明がなされることが多い (例: Sugiyama *et al.*, 2009)。事実、風強制の季節変動と中層の鉛直拡散係数が連動しているという観測的証拠もあり (Whalen *et al.*, 2018)、表層の慣性振動が内部領域の混合に影響することは疑いようがない。しかし定量的には、Furuichi *et al.* (2008) の数値実験において、風から注入される約 400 GW の慣性振動エネルギーは大部分が混合層内で散逸し、密度躍層以深へ伝わるエネルギーは最大で 100 GW 程度であると報告された。当時の数値モデルで考慮されていなかった要素として水平スケール数百 km 以下の渦があり、渦流による実効的な慣性周波数の変化が近慣性波の効率的な下方伝搬を促すという報告もあるものの (Young and Ben Jelloul, 1997; Kawaguchi *et al.*, 2020; Asselin and Young, 2020)、近年では風から慣性振動へのエネルギー供給量はさらに少ないと見積もられており (Al-

ford, 2020)、その深海混合への寄与は潮汐と比較して限定的である。

一方、風から供給されるエネルギーのうち、準定常的なエクマン輸送によって駆動される地衡流が混合に大きな役割を演じていることがこれまでの研究で明らかにされている。代表的には、水深数千 m の海底付近まで強い地衡流の存在する南大洋において、山岳波として生じた内部重力波が大きく混合に寄与している (Sheen *et al.*, 2013; Takahashi and Hibiya, 2019; Sasaki *et al.*, 2024)。日本近海では、黒潮の琉軸と起伏の大きな地形が交錯するトカラ海峡で極めて高い乱流散逸率が報告されており、そのエネルギー変換の仕組みについて活発な議論がなされている (Nagai *et al.*, 2017; Tsutsumi *et al.*, 2017; Takahashi *et al.*, 2024)。より一般に、地衡流の流路に存在する海山によってその下流側に出来る擾乱は、山が十分高い場合に重力波ではなく渦流の wake を形成することが知られ、そのエネルギーは全球積算で山岳波を上回る量の水塊混合をもたらすと推算されている (Perfect *et al.*, 2020; Mashayek *et al.*, 2024)。地衡流が地形に衝突して起こる混合は潮汐混合に比べてパラメタリゼーションの整備が進んでおらず、今後の大きな課題と言える。

本稿では主に海洋の内部領域における混合を想定してそこに寄与する重力波の相互作用を論じてきた。一方、深海の乱流散逸率は多くの海域で急峻な海底地形の直上に集中することが過去の観測で明らかとなっており、Munk らが提唱した鉛直一次元の移流拡散バランスに基づく理解を改め、海底の境界付近に集中した混合をもたらす新しい循環像が提案されている (Ferrari *et al.*, 2016)。それによれば、海底斜面上で強い混合がある場合、内部領域から境界層に引き込まれる下降流が生じ、一方で境界層内では地形に沿った強い湧昇流が生じる。こうしたメカニズムは特に南極域から全球へ広がる底層水の変質において重要な役割を果たすと考えられる (de Lavergne *et al.*, 2016)。ただし、深海底で生じる内部波や渦のエネルギーのうち、どれだけが局地的な底層水の湧昇に使われるのかは定かではない。広く用いられているパラメタリゼーションでは、地形性重力波のうち 3 割が局地的に乱流を生成し、その散逸率は海底から 500 m のスケールで指数的に減衰するとしている。

これらの数字はしばしば槍玉に挙げられ、例えば南大洋では海底から 1000 m 以上の高さまで強い鉛直拡散が生じていることが報告されており (Sasaki *et al.*, 2024), 散逸率の減衰スケールの決定機構について内部重力波の力学に基づいた議論が進展している (例: He and Hibiya, 2024)。総じて、海洋循環の詳細な理解に向け、既存の理論やパラメタリゼーションをアップデートして、さらに精度の高いモデルの構築を目指し続けることが求められる。

6. おわりに

本稿では深海の乱流混合を通じて海洋環境に影響を与える内部重力波の共鳴不安定現象について、波動運動論や Floquet 理論、変形座標系による直接数値シミュレーションといった、種々の理論的手法を基盤とした研究成果について紹介をしてきた。これらの手法は、いずれも内部重力波の共鳴相互作用に留まらず広範な問題に対して応用が可能である。本文では波動運動論方程式が海洋表面波の数値予報モデルに用いられていることを既に述べた。加えて、Floquet 理論と変形座標系を組み合わせた数値解析は、海洋乱流の生成に関わるスケール間相互作用の研究において無数の用途が想定される。例えば、Onuki *et al.* (2023) はサブメソスケール渦を想定して流線に沿った変形座標系を定義し、小スケールの内部重力波が渦からエネルギーを受け取って励起・砕波して乱流散逸に至る過程を詳細に調べた。通常の海洋モデルでは検証が困難な、幅広いスケール成分間のエネルギー輸送が関与する乱流現象は、海洋学の難問として残り続けており、その理解に向けて柔軟な設計で計算効率を最大限に高める数値解析技術の開発が今後も肝要である。

本稿の結びとして、物理学に根差した基礎研究が海洋学に果たす役割について議論しておきたい。歴史を辿ると、海洋物理学の理論体系について、風成循環や波動論といった最も基礎的な部分は 1980 年代までに概ね確立されていた (Gill, 1982; Pedlosky, 1987)。それゆえか、現代の海洋物理学にあっては、基礎となる力学研究よりもデータ分析や汎用的な数値モデルによる予測といった応用に目が向きがちである。一方、純粋な物理学分野、なかでも物性物理学においては、量子ホール効果を始め

としたトポロジカル物性 (Thouless *et al.*, 1982), ゆらぎの定理に代表される現代的な非平衡統計力学 (Evans *et al.*, 1993), あるいは非エルミート量子力学 (Bender and Boettcher, 1998) の体系が 1980 年代以降に誕生していった。これらはいずれも、物理学の根本原理が覆されて生まれたのではなく、既存の理論体系に対して「見方」を変えることで新しい方法論が導入され、豊かな学問領域が創造されていったという点が共通する。新規性の高い方法論は、それ自体がとてつもない学術的価値を秘めている。例としてトポロジカル物性の分野では、電子の量子状態に対して定義される非自明なトポロジカル構造を電磁波に応用することで、損失を抑えた光導波路を構成できることが発見されるなど (Haldane and Raghu, 2008), 初期の量子ホール効果の文脈では予想も付かなかった学問分野の広がりを実現している。とすれば、海洋学においても我々が既に「分かったつもり」の現象に新しい見方を与えることで、革新的な発見がもたらされる可能性がある。筆者自身、こうした期待を胸に、現代の物性物理学から着想を得て、Wigner 変換と擬微分作用素を用いた地球流体波動の局所分離解析技術の開発 (Onuki, 2020), ゆらぎの定理を応用した地球流体におけるエネルギー逆カスケードの解釈 (Onuki, 2022), 大偏差原理に基づく波動運動論方程式における時間の矢のパラドックスの解消 (Onuki *et al.*, 2024a), 回転成層流体を伝わる波動のトポロジカル構造と沿岸 Kelvin 波の関係性の解明 (Onuki *et al.*, 2024b) といった取り組みをしてきた。さらに筆者の知るところでは、量子アルゴリズムによる海洋循環の効率的な計算方法の模索 (Matsuta and Furue, 2024) や、情報熱力学の観点から見た黒潮とメキシコ湾流の同期現象の解釈 (Yasuda and Koshiyama, 2025) といった、極めて先駆的なテーマに挑戦する若手研究者が国内にいる。いつの時代であっても、今この瞬間が新しい学問領域の黎明期であると捉え、画期的なアイデアを野心的に追い求めることが、海洋学の長期的発展をもたらす原動力になるはずである。

謝 辞

このたび、名誉ある日本海洋学会岡田賞を受賞できたことは身に余る光栄であります。ご推薦をいただきまし

た賞選考委員の方々、これまでの研究活動を支えてくださった関係各所の方々、ならびに学会員の皆様に深く感謝を申し上げます。受賞題目にあります研究は、筆者が東京大学大学院理学系研究科に大学院生・JSPS 特別研究員として在籍した期間、ならびに九州大学応用力学研究所大気海洋環境研究センターに着任してからの4年間に実施をしました。大学院指導教員の日比谷紀之先生、職場上司の広瀬直毅先生には書き尽くせない恩があります。第4節の研究は新学術領域研究「海洋混合学の創設：物質循環・気候・生態系の維持と長周期変動の解明」公募研究（MEXT 科研費 JP18H04918）として実施をしました。第6節で触れた一連の研究は、JSPS 科研費 JP20K14556、ならびに九州大学応用力学研究所の共同利用研究の助成を受けるとともに、JSPS 海外特別研究員としてリヨン高等師範学校物理学研究所に滞在した期間を挟んで実施をしました。いずれの環境におきましても、興味のままに突き進む筆者の研究スタイルに理解を示し、自由であることを許してくれる周囲の方々の存在があったからこそ、本受賞に至ることができたと考えております。今後も海洋学の「面白い問題」を見つけて幅広い方々と共有して参りたく、お付き合いをいただければ幸いです。

References

- Akylas, T.R., and C. Kakoutas (2023): Stability of internal gravity wave modes: from triad resonance to broadband instability. *J. Fluid Mech.*, **961**, A22, doi: 10.1017/jfm.2023.265.
- Alford, M.H. (2020): Revisiting near-inertial wind work: Slab models, relative stress, and mixed layer deepening. *J. Phys. Oceanogr.*, **50**(11), 3141–3156, doi: 10.1175/JPO-D-20-0105.1.
- Alford, M.H., and Z. Zhao (2007): Global patterns of low-mode internal-wave propagation. Part I: Energy and energy flux. *J. Phys. Oceanogr.*, **37**(7), 1829–1848, doi: 10.1175/JPO3085.1.
- Amante, C., and B.W. Eakins (2009): ETOPO1 1 Arc-Minute Global Relief Model: Procedures, data sources and analysis. *NOAA Technical Memorandum NESDIS*, NGDC-24.
- Annenkov, S.Y., and V.I. Shrira (2006): Role of non-resonant interactions in the evolution of nonlinear random water wave fields. *J. Fluid Mech.*, **561**, 181–207, doi: 10.1017/S0022112006000632.
- Annenkov, S., and V. Shrira (2015): Modelling the impact of squall on wind waves with the generalized kinetic equation. *J. Phys. Oceanogr.*, **45**(3), 807–812, doi: 10.1175/JPO-D-14-0182.1.
- Ansong, J.K., *et al.* (2018): Geographical distribution of diurnal and semidiurnal parametric subharmonic instability in a global ocean circulation model. *J. Phys. Oceanogr.*, **48**(6), 1409–1431, doi: 10.1175/JPO-D-17-0164.1.
- Asselin, O., and W.R. Young (2020): Penetration of wind-generated near-inertial waves into a turbulent ocean. *J. Phys. Oceanogr.*, **50**(6), 1699–1716, doi: 10.1175/JPO-D-19-0319.1.
- Balmforth, N.J., and T. Peacock (2009): Tidal conversion by supercritical topography. *J. Phys. Oceanogr.*, **39**(8), 1965–1974, doi: 10.1175/2009JPO4057.1.
- Bender, C.M., and S. Boettcher (1998): Real spectra in non-Hermitian Hamiltonians having PT symmetry. *Phys. Rev. Lett.*, **80**(24), 5243–5246, doi: 10.1103/PhysRevLett.80.5243.
- Bourget, B., H. Sclan, T. Dauxois, M. Le Bars, P. Odier, and S. Joubaud (2014): Finite-size effects in parametric subharmonic instability. *J. Fluid Mech.*, **759**, 739–750, doi: 10.1017/jfm.2014.550.
- Bouruet-Aubertot, P., C. Koudella, C. Staquet, and K.B. Winters (2001): Particle dispersion and mixing induced by breaking internal gravity waves. *Dynam. Atmos. Oceans*, **33**(2), 95–134, doi: 10.1016/S0377-0265(00)00056-7.
- Broutman, D., and W.R. Young (1986): On the interaction of small-scale oceanic internal waves with near-inertial waves. *J. Fluid Mech.*, **166**, 341–358, doi: 10.1017/S0022112086000186.
- Broutman, D., and R. Grimshaw (1988): The energetics of the interaction between short small-amplitude internal waves and inertial waves. *J. Fluid Mech.*, **196**, 93–106, doi: 10.1017/S0022112088002629.
- Brüggemann, N., *et al.* (2024): Parameterized internal wave mixing in three ocean general circulation models. *J. Adv. Model. Earth Syst.*, **16**(6), e2023MS003768, doi: 10.1029/2023MS003768.
- Caulfield, C.P. (2021): Layering, instabilities, and mixing in turbulent stratified flows. *Annu. Rev. Fluid Mech.*, **53**(1), 113–145, doi: 10.1146/annurev-fluid-042320-100458.
- Dauxois, T., S. Joubaud, P. Odier, and A. Venaille (2018): Instabilities of internal gravity wave beams. *Annu. Rev. Fluid Mech.*, **50**(1), 131–156, doi: 10.1146/annurev-fluid-122316-044539.
- Davies Wykes, M.S., and S.B. Dalziel (2014): Efficient mixing in stratified flows: experimental study of a Rayleigh-Taylor unstable interface within an otherwise stable stratification. *J. Fluid Mech.*, **756**, 1027–1057, doi: 10.1017/jfm.2014.308.
- de Lavergne, C., G. Madec, J. Le Sommer, A.J.G. Nurser, and A.C. Naveira Garabato (2016): The impact of a variable mixing efficiency on the abyssal overturning. *J. Phys. Oceanogr.*, **46**(2), 663–681, doi: 10.1175/JPO-D-14-0259.1.
- de Lavergne, C., S. Falahat, G. Madec, F. Roquet, J. Nycander, and C. Vic (2019): Toward global maps of internal tide energy sinks. *Ocean Modell.*, **137**, 52–75, doi: 10.1016/j.ocemod.2019.03.010.
- de Lavergne, C., *et al.* (2020): A parameterization of local and remote tidal mixing. *J. Adv. Model. Earth Syst.*, **12**(5), e2020MS002065, doi: 10.1029/2020MS002065.
- Dematteis, G., A. Le Boyer, F. Pollmann, K.L. Polzin, M.H. Alford, C.B. Whalen, and Y.V. Lvov (2024): Interacting internal waves explain global patterns of interior ocean mixing. *Nat. Commun.*, **15**(1), 7468, doi: 10.1038/s41467-024-51503-6.
- Eden, C., and D. Olbers (2014): An energy compartment model for propagation, nonlinear interaction, and dissipation of internal gravity waves. *J. Phys. Oceanogr.*, **44**(8), 2093–2106, doi: 10.1175/JPO-D-13-0224.1.
- Eden, C., F. Pollmann, and D. Olbers (2020): Towards a global spectral

- energy budget for internal gravity waves in the ocean. *J. Phys. Oceanogr.*, **50**(4), 935–944, doi: 10.1175/JPO-D-19-0022.1.
- Evans, D.J., E.G.D. Cohen, and G.P. Morriss (1993): Probability of second law violations in shearing steady states. *Phys. Rev. Lett.*, **71**(15), 2401–2404, doi: 10.1103/PhysRevLett.71.2401.
- Fan, B., and T.R. Akylas (2021a): Instabilities of finite-width internal wave beams: from Floquet analysis to PSI. *J. Fluid Mech.*, **913**, A5, doi: 10.1017/jfm.2020.1172.
- Fan, B., and T.R. Akylas (2021b): Near-inertial parametric subharmonic instability of internal wave beams in a background mean flow. *J. Fluid Mech.*, **911**, R3, doi: 10.1017/jfm.2020.1130.
- Ferrari, R., A. Mashayek, T.J. McDougall, M. Nikurashin, and J.-M. Campin (2016): Turning ocean mixing upside down. *J. Phys. Oceanogr.*, **46**(7), 2239–2261, doi: 10.1175/JPO-D-15-0244.1.
- Fox-Kemper, B., *et al.* (2019): Challenges and prospects in ocean circulation models. *Front. Mar. Sci.*, **6**, 65, doi: 10.3389/fmars.2019.00065.
- Fritts, D.C., L. Wang, J. Werne, T. Lund, and K. Wan (2009a): Gravity wave instability dynamics at high Reynolds numbers. Part I: Wave field evolution at large amplitudes and high frequencies. *J. Atmos. Sci.*, **66**(5), 1126–1148, doi: 10.1175/2008JAS2726.1.
- Fritts, D.C., L. Wang, J. Werne, T. Lund, and K. Wan (2009b): Gravity wave instability dynamics at high Reynolds numbers. Part II: Turbulence evolution, structure, and anisotropy. *J. Atmos. Sci.*, **66**(5), 1149–1171, doi: 10.1175/2008JAS2727.1.
- Furuichi, N., T. Hibiya, and Y. Niwa (2008): Model-predicted distribution of wind-induced internal wave energy in the world's oceans. *J. Geophys. Res. Océ.*, **113**(C9), doi: 10.1029/2008JC004768.
- Garanaik, A., and S.K. Venayagamoorthy (2019): On the inference of the state of turbulence and mixing efficiency in stably stratified flows. *J. Fluid Mech.*, **867**, 323–333, doi: 10.1017/jfm.2019.142.
- Gill, A.E. (1982): *Atmosphere-Ocean Dynamics*. Academic Press, San Diego, USA, 662 pp.
- 後藤俊幸 (1998) : 乱流理論の基礎. 朝倉書店, 東京, 232 pp.
- Gregg, M.C., E.A. D'Asaro, J.J. Riley, and E. Kunze (2018): Mixing efficiency in the ocean. *Annu. Rev. Mar. Sci.*, **10**(1), 443–473, doi: 10.1146/annurev-marine-121916-063643.
- Haldane, F.D.M., and S. Raghu (2008): Possible realization of directional optical waveguides in photonic crystals with broken time-reversal symmetry. *Phys. Rev. Lett.*, **100**(1), 013904, doi: 10.1103/PhysRevLett.100.013904.
- Hasselmann, K. (1962): On the non-linear energy transfer in a gravity-wave spectrum Part 1. General theory. *J. Fluid Mech.*, **12**(4), 481–500, doi: 10.1017/S0022112062000373.
- Hasselmann, K. (1966): Feynman diagrams and interaction rules of wave-wave scattering processes. *Rev. Geophys.*, **4**(1), 1–32, doi: 10.1029/RG004i001p00001.
- Hazewinkel, J., and K.B. Winters (2011): PSI of the internal tide on a β plane: Flux divergence and near-inertial wave propagation. *J. Phys. Oceanogr.*, **41**(9), 1673–1682, doi: 10.1175/2011JPO4605.1.
- He, Y., and T. Hibiya (2024): The vertical structure of internal lee-wave-driven benthic mixing hotspots. *J. Phys. Oceanogr.*, **54**(1), 253–263, doi: 10.1175/JPO-D-22-0268.1.
- Heney, F.S., J. Wright, and S.M. Flatté (1986): Energy and action flow through the internal wave field: An eikonal approach. *J. Geophys. Res. Océ.*, **91**(C7), 8487–8495, doi: 10.1029/JC091iC07p08487.
- Hibiya, T., M. Nagasawa, and Y. Niwa (2002): Nonlinear energy transfer within the oceanic internal wave spectrum at mid and high latitudes. *J. Geophys. Res. Océ.*, **107**(C11), 28–1, doi: 10.1029/2001JC001210.
- Hibiya, T., and M. Nagasawa, (2004): Latitudinal dependence of diapycnal diffusivity in the thermocline estimated using a finescale parameterization. *Geophys. Res. Lett.*, **31**(1), doi: 10.1029/2003GL017998.
- Hibiya, T., M. Nagasawa, and Y. Niwa (2006): Global mapping of diapycnal diffusivity in the deep ocean based on the results of expendable current profiler (XCP) surveys. *Geophys. Res. Lett.*, **33**(3), doi: 10.1029/2005GL025218.
- Hibiya, T., M. Nagasawa, and Y. Niwa (2007): Latitudinal dependence of diapycnal diffusivity in the thermocline observed using a microstructure profiler. *Geophys. Res. Lett.*, **34**(24), doi: 10.1029/2007GL032323.
- Ijichi, T., and T. Hibiya (2015): Frequency-based correction of finescale parameterization of turbulent dissipation in the deep ocean. *J. Atmos. Ocean. Technol.*, **32**(8), 1526–1535, doi: 10.1175/JTECH-D-15-0031.1.
- Ijichi, T., and T. Hibiya (2018): Observed variations in turbulent mixing efficiency in the deep ocean. *J. Phys. Oceanogr.*, **48**(8), 1815–1830, doi: 10.1175/JPO-D-17-0275.1.
- Ijichi, T., L. St. Laurent, K.L. Polzin, and J.M. Toole (2020): How variable is mixing efficiency in the abyss? *Geophys. Res. Lett.*, **47**(7), e2019GL086813, doi: 10.1029/2019GL086813.
- Janssen, P.A.E.M. (2003): Nonlinear four-wave interactions and freak waves. *J. Phys. Oceanogr.*, **33**(4), 863–884, doi: 10.1175/1520-0485(2003)33<863:NFAFW>2.0.CO;2.
- Karimi, H.H., and T.R. Akylas (2014): Parametric subharmonic instability of internal waves: locally confined beams versus monochromatic wavetrains. *J. Fluid Mech.*, **757**, 381–402, doi: 10.1017/jfm.2014.509.
- Karimi, H.H., and T.R. Akylas (2017): Near-inertial parametric subharmonic instability of internal wave beams. *Phys. Rev. Fluids*, **2**(7), 074801, doi: 10.1103/PhysRevFluids.2.074801.
- 片岡武 (2018) : 大気・海洋中の内部重力波ビーム. 応用数理, **28**(1), 11–17.
- Kataoka, T., and T.R. Akylas (2013): Stability of internal gravity wave beams to three-dimensional modulations. *J. Fluid Mech.*, **736**, 67–90, doi: 10.1017/jfm.2013.527.
- Kataoka, T., and T.R. Akylas (2015): On three-dimensional internal gravity wave beams and induced large-scale mean flows. *J. Fluid Mech.*, **769**, 621–634, doi: 10.1017/jfm.2015.143.
- Kawaguchi, Y., T. Wagawa, and Y. Igeta (2020): Near-inertial internal waves and multiple-inertial oscillations trapped by negative vorticity anomaly in the central Sea of Japan. *Prog. Oceanogr.*, **181**, 102240, doi: 10.1016/j.pocean.2019.102240.
- Kawasaki, T., H. Hasumi, and Y. Tanaka (2021): Role of tide-induced vertical mixing in the deep Pacific Ocean circulation. *J. Oceanogr.*, **77**(2), 173–184, doi: 10.1007/s10872-020-00584-0.
- Klostermeyer, J. (1982): On parametric instabilities of finite-amplitude internal gravity waves. *J. Fluid Mech.*, **119**, 367–377, doi: 10.1017/S0022112082001396.
- Kraichnan, R.H. (1959): The structure of isotropic turbulence at very high Reynolds numbers. *J. Fluid Mech.*, **5**(4), 497–543, doi: 10.1017/S0022112059000362.

- Kunze, E. (2017): Internal-wave-driven mixing: Global geography and budgets. *J. Phys. Oceanogr.*, **47**(6), 1325–1345, doi: 10.1175/JPO-D-16-0141.1.
- Lahaye, N., A. Ponte, J. Le Sommer, and A. Albert (2024): Internal tide surface signature and incoherence in the North Atlantic. *Geophys. Res. Lett.*, **51**(12), e2024GL108508, doi: 10.1029/2024GL108508.
- Lien, R.-C., and M.C. Gregg (2001): Observations of turbulence in a tidal beam and across a coastal ridge. *J. Geophys. Res. Oce.*, **106**(C3), 4575–4591, doi: 10.1029/2000JC000351.
- Locarnini, R.A., *et al.* (2013): World Ocean Atlas 2013, Volume 1: Temperature. *NOAA Atlas NESDIS* 73.
- Lombard, P.N., and J.J. Riley (1996): Instability and breakdown of internal gravity waves. I. Linear stability analysis. *Phys. Fluids*, **8**(12), 3271–3287, doi: 10.1063/1.869117.
- Lvov, Y., and E.G. Tabak (2004): A Hamiltonian formulation for long internal waves. *Physica D*, **195**(1–2), 106–122, doi: 10.1016/j.physd.2004.03.010.
- MacKinnon, J.A., and K.B. Winters (2005): Subtropical catastrophe: Significant loss of low-mode tidal energy at 28.9°. *Geophys. Res. Lett.*, **32**(15), doi: 10.1029/2005GL023376.
- MacKinnon, J.A., M.H. Alford, R. Pinkel, J. Klymak, and Z. Zhao (2013a): The latitudinal dependence of shear and mixing in the Pacific transiting the critical latitude for PSI. *J. Phys. Oceanogr.*, **43**(1), 3–16, doi: 10.1175/JPO-D-11-0107.1.
- MacKinnon, J.A., M.H. Alford, O. Sun, R. Pinkel, Z. Zhao, and J. Klymak (2013b): Parametric subharmonic instability of the internal tide at 29°N. *J. Phys. Oceanogr.*, **43**(1), 17–28, doi: 10.1175/JPO-D-11-0108.1.
- MacKinnon, J.A., *et al.* (2017): Climate process team on internal wave-driven ocean mixing. *Bull. Amer. Meteor. Soc.*, **98**(11), 2429–2454, doi: 10.1175/BAMS-D-16-0030.1.
- Maffioli, A., G. Brethouwer, and E. Lindborg (2016): Mixing efficiency in stratified turbulence. *J. Fluid Mech.*, **794**, R3, doi: 10.1017/jfm.2016.206.
- Marshall, J., and K. Speer (2012): Closure of the meridional overturning circulation through Southern Ocean upwelling. *Nat. Geosci.*, **5**(3), 171–180, doi: 10.1038/ngeo1391.
- Mashayek, A., J. Gula, L.E. Baker, A.C. Naveira Garabato, L. Cimoli, J.J. Riley, and C. de Lavergne (2024): On the role of seamounts in upwelling deep-ocean waters through turbulent mixing. *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*, **121**(27), e2322163121, doi: 10.1073/pnas.2322163121.
- Matsuta, T., and R. Furue (2024): Formulation and evaluation of ocean dynamics problems as optimization problems for quantum annealing machines. *arXiv preprint*, doi: 10.48550/arXiv.2405.11782.
- McComas, C.H., and P. Müller (1981): Time scales of resonant interactions among oceanic internal waves. *J. Phys. Oceanogr.*, **11**(2), 139–147, doi: 10.1175/1520-0485(1981)011<0139:TSORIA>2.0.CO;2.
- Mied, R.P. (1976): The occurrence of parametric instabilities in finite-amplitude internal gravity waves. *J. Fluid Mech.*, **78**(4), 763–784, doi: 10.1017/S0022112076002735.
- Müller, P., G. Holloway, F. Henyey, and N. Pomphrey (1986): Nonlinear interactions among internal gravity waves. *Rev. Geophys.*, **24**(3), 493–536, doi: 10.1029/RG024i003p00493.
- Munk, W.H. (1966): Abyssal recipes. *Deep-Sea Res. Oceanogr. Abstr.*, **13**(4), 707–730, doi: 10.1016/0011-7471(66)90602-4.
- Munk, W.H. (1981): Internal waves and small-scale processes. p. 264–291. In *Evolution of Physical Oceanography*, edited by B.A. Warren and C. Wunsch, MIT Press, Cambridge, USA.
- Munk, W., and C. Wunsch (1998): Abyssal recipes II: energetics of tidal and wind mixing. *Deep Sea Res. Part I*, **45**(12), 1977–2010, doi: 10.1016/S0967-0637(98)00070-3.
- Nagai, T., D. Hasegawa, T. Tanaka, H. Nakamura, E. Tsutsumi, R. Inoue, and T. Yamashiro (2017): First evidence of coherent bands of strong turbulent layers associated with high-wavenumber internal-wave shear in the upstream Kuroshio. *Sci. Rep.*, **7**(1), 14555, doi: 10.1038/s41598-017-15167-1.
- Nazarenko, S. (2011): *Wave Turbulence*. Springer, Heidelberg, Germany, 279 pp.
- Niwa, Y., and T. Hibiya (2011): Estimation of baroclinic tide energy available for deep ocean mixing based on three-dimensional global numerical simulations. *J. Oceanogr.*, **67**, 493–502, doi: 10.1007/s10872-011-0052-1.
- Niwa, Y., and T. Hibiya (2014): Generation of baroclinic tide energy in a global three-dimensional numerical model with different spatial grid resolutions. *Ocean Modell.*, **80**, 59–73, doi: 10.1016/j.ocemod.2014.05.003.
- Oka, A., and Y. Niwa (2013): Pacific deep circulation and ventilation controlled by tidal mixing away from the sea bottom. *Nat. Commun.*, **4**(1), 2419, doi: 10.1038/ncomms3419.
- Olbers, D.J. (1983): Models of the oceanic internal wave field. *Rev. Geophys.*, **21**(7), 1567–1606, doi: 10.1029/RG021i007p01567.
- Olbers, D.J., and N. Pomphrey (1981): Disqualifying two candidates for the energy balance of oceanic internal waves. *J. Phys. Oceanogr.*, **11**, 1423–1425, doi: 10.1175/1520-0485(1981)011<1423:DTCFTE>2.0.CO;2.
- Olbers, D., F. Pollmann, and C. Eden (2020): On PSI interactions in internal gravity wave fields and the decay of baroclinic tides. *J. Phys. Oceanogr.*, **50**(3), 751–771, doi: 10.1175/JPO-D-19-0224.1.
- Olbers, D., F. Pollmann, A. Patel, and C. Eden (2023): A model of energy and spectral shape for the internal gravity wave field in the deep sea: The parametric IDEMIX model. *J. Phys. Oceanogr.*, **53**(5), 1337–1354, doi: 10.1175/JPO-D-22-0147.1.
- Onuki, Y. (2020): Quasi-local method of wave decomposition in a slowly varying medium. *J. Fluid Mech.*, **883**, A56, doi: 10.1017/jfm.2019.825.
- Onuki, Y. (2022): Irreversible energy extraction from negative-temperature two-dimensional turbulence. *Phys. Rev. E*, **106**(6), 064131, doi: 10.1103/PhysRevE.106.064131.
- Onuki, Y., and T. Hibiya (2015): Excitation mechanism of near-inertial waves in baroclinic tidal flow caused by parametric subharmonic instability. *Ocean Dyn.*, **65**, 107–113, doi: 10.1007/s10236-014-0789-3.
- Onuki, Y., and T. Hibiya (2018): Decay rates of internal tides estimated by an improved wave-wave interaction analysis. *J. Phys. Oceanogr.*, **48**(11), 2689–2701, doi: 10.1175/JPO-D-17-0278.1.
- Onuki, Y., and T. Hibiya (2019): Parametric subharmonic instability in a narrow-band wave spectrum. *J. Fluid Mech.*, **865**, 247–280, doi: 10.1017/jfm.2019.44.
- Onuki, Y., and Y. Tanaka (2019): Instabilities of finite-amplitude inter-

- nal wave beams. *Geophys. Res. Lett.*, **46**(13), 7527–7535, doi: 10.1029/2019GL082570.
- Onuki, Y., S. Joubaud, and T. Dauxois (2021): Simulating turbulent mixing caused by local instability of internal gravity waves. *J. Fluid Mech.*, **915**, A77, doi: 10.1017/jfm.2021.119.
- Onuki, Y., S. Joubaud, and T. Dauxois (2023): Breaking of internal waves parametrically excited by ageostrophic anticyclonic instability. *J. Phys. Oceanogr.*, **53**(6), 1591–1613, doi: 10.1175/JPO-D-22-0152.1.
- Onuki, Y., J. Guioth, and F. Bouchet (2024a): Dynamical large deviations for an inhomogeneous wave kinetic theory: linear wave scattering by a random medium. *Ann. Henri Poincaré*, **25**(1), 1215–1259, doi: 10.1007/s00023-023-01329-7.
- Onuki, Y., A. Venaille, and P. Delplace (2024b): Bulk-edge correspondence recovered in incompressible geophysical flows. *Phys. Rev. Res.*, **6**(3), 033161, doi: 10.1103/PhysRevResearch.6.033161.
- Pedlosky, J. (1987): *Geophysical Fluid Dynamics*. Second edition. Springer, New York, USA, 710 pp.
- Perfect, B., N. Kumar, and J.J. Riley (2020): Energetics of seamount wakes. Part I: Energy exchange. *J. Phys. Oceanogr.*, **50**(5), 1365–1382, doi: 10.1175/JPO-D-19-0105.1.
- Pollmann, F., C. Eden, and D. Olbers (2017): Evaluating the global internal wave model IDEMIX using finestructure methods. *J. Phys. Oceanogr.*, **47**(9), 2267–2289, doi: 10.1175/JPO-D-16-0204.1.
- Polzin, K.L., and Y.V. Lvov (2011): Toward regional characterizations of the oceanic internal wavefield. *Rev. Geophys.*, **49**(4), doi: 10.1029/2010RG000329.
- Pomphrey, N., J.D. Meiss, and K.M. Watson (1980): Description of nonlinear internal wave interactions using Langevin methods. *J. Geophys. Res. Oce.*, **85**(C2), 1085–1094, doi: 10.1029/JC085iC02p01085.
- Richet, O., C. Muller, and J.-M. Chomaz (2017): Impact of a mean current on the internal tide energy dissipation at the critical latitude. *J. Phys. Oceanogr.*, **47**(6), 1457–1472, doi: 10.1175/JPO-D-16-0197.1.
- Rogallo, R.S. (1981): Numerical experiments in homogeneous turbulence. *NASA Technical Memorandum*, 81315.
- Sasaki, Y., I. Yasuda, K. Katsumata, S. Kouketsu, and H. Uchida (2024): Turbulence across the Antarctic Circumpolar Current in the Indian Southern Ocean: Micro-temperature measurements and finescale parameterizations. *J. Geophys. Res. Oce.*, **129**(2), e2023JC019847, doi: 10.1029/2023JC019847.
- Sheen, K.L., *et al.* (2013): Rates and mechanisms of turbulent dissipation and mixing in the Southern Ocean: Results from the Diapycnal and Isopycnal Mixing Experiment in the Southern Ocean (DIMES). *J. Geophys. Res. Oce.*, **118**(6), 2774–2792, doi: 10.1002/jgrc.20217.
- Skitka, J., *et al.* (2024): Probing the nonlinear interactions of supertidal internal waves using a high-resolution regional ocean model. *J. Phys. Oceanogr.*, **54**(2), 399–425, doi: 10.1175/JPO-D-22-0236.1.
- Smyth, W.D., J.N. Moum, and D.R. Caldwell (2001): The efficiency of mixing in turbulent patches: Inferences from direct simulations and microstructure observations. *J. Phys. Oceanogr.*, **31**(8), 1969–1992, doi: 10.1175/1520-0485(2001)031<1969:TEOMIT>2.0.CO;2.
- Sonmor, L.J., and G.P. Klaassen (1997): Toward a unified theory of gravity wave stability. *J. Atmos. Sci.*, **54**(22), 2655–2680, doi: 10.1175/1520-0469(1997)054<2655:TAUTOG>2.0.CO;2.
- Sugiyama, Y., Y. Niwa, and T. Hibiya (2009): Numerically reproduced internal wave spectra in the deep ocean. *Geophys. Res. Lett.*, **36**(7), doi: 10.1029/2008GL036825.
- Sun, O.M., and R. Pinkel (2012): Energy transfer from high-shear, low-frequency internal waves to high-frequency waves near Kaena Ridge, Hawaii. *J. Phys. Oceanogr.*, **42**(9), 1524–1547, doi: 10.1175/JPO-D-11-0117.1.
- Tabaei, A., and T.R. Akylas (2003): Nonlinear internal gravity wave beams. *J. Fluid Mech.*, **482**, 141–161, doi: 10.1017/S0022112003003902.
- Takahashi, A., and T. Hibiya (2019): Assessment of finescale parameterizations of deep ocean mixing in the presence of geostrophic current shear: Results of microstructure measurements in the Antarctic Circumpolar Current region. *J. Geophys. Res. Oce.*, **124**(1), 135–153, doi: 10.1029/2018JC014030.
- Takahashi, A., *et al.* (2024): Energetic stratified turbulence generated by Kuroshio-seamount interactions in Tokara Strait. *J. Phys. Oceanogr.*, **54**(2), 461–484, doi: 10.1175/JPO-D-22-0242.1.
- Thouless, D.J., M. Kohmoto, M.P. Nightingale, and M. den Nijs (1982): Quantized Hall conductance in a two-dimensional periodic potential. *Phys. Rev. Lett.*, **49**(6), 405–408, doi: 10.1103/PhysRevLett.49.405.
- Toggweiler, J.R., and B. Samuels (1998): On the ocean's large-scale circulation near the limit of no vertical mixing. *J. Phys. Oceanogr.*, **28**(9), 1832–1852, doi: 10.1175/1520-0485(1998)028<1832:OTOSLS>2.0.CO;2.
- Tolman, H.L. (2009): User manual and system documentation of WAVEWATCH III TM version 3.14. Technical Note (https://polar.ncep.noaa.gov/mmab/papers/tn276/MMAB_276.pdf).
- Tsutsumi, E., T. Matsuno, R.-C. Lien, H. Nakamura, T. Senjyu, and X. Guo (2017): Turbulent mixing within the Kuroshio in the Tokara Strait. *J. Geophys. Res. Oce.*, **122**(9), 7082–7094, doi: 10.1002/2017JC013049.
- Wang, S., X. Guo, A. Cao, E. Tsutsumi, and X. Chen (2024): Parametric subharmonic instability of the M_2 internal tides in the Tokara Strait. *J. Geophys. Res. Oce.*, **129**(11), e2022JC019622, doi: 10.1029/2022JC019622.
- Waterhouse, A.F., *et al.* (2014): Global patterns of diapycnal mixing from measurements of the turbulent dissipation rate. *J. Phys. Oceanogr.*, **44**(7), 1854–1872, doi: 10.1175/JPO-D-13-0104.1.
- Whalen, C.B., J.A. MacKinnon, and L.D. Talley (2018): Large-scale impacts of the mesoscale environment on mixing from wind-driven internal waves. *Nat. Geosci.*, **11**(11), 842–847, doi: 10.1038/s41561-018-0213-6.
- Whalen, C.B., C. de Lavergne, A.C. Naveira Garabato, J.M. Klymak, J.A. MacKinnon, and K.L. Sheen (2020): Internal wave-driven mixing: Governing processes and consequences for climate. *Nat. Rev. Earth Environ.*, **1**(11), 606–621, doi: 10.1038/s43017-020-0097-z.
- Winters, K.B., P.N. Lombard, J.J. Riley, and E.A. D'Asaro (1995): Available potential energy and mixing in density-stratified fluids. *J. Fluid Mech.*, **289**, 115–128, doi: 10.1017/S002211209500125X.
- Wunsch, C. (1975): Internal tides in the ocean. *Rev. Geophys.*, **13**(1), 167–182, doi: 10.1029/RG013i001p00167.
- Yang, W., T. Hibiya, Y. Tanaka, L. Zhao, and H. Wei (2018): Modification of parametric subharmonic instability in the presence of background geostrophic currents. *Geophys. Res. Lett.*, **45**(23),

- 12957–12962, doi: 10.1029/2018GL080183.
- Yang, W., H. Wei, and L. Zhao (2020): Parametric subharmonic instability of the semidiurnal internal tides at the East China Sea shelf slope. *J. Phys. Oceanogr.*, **50**(4), 907–920, doi: 10.1175/JPO-D-19-0163.1.
- Yang, W., H. Wei, and L. Zhao (2022): Energy transfer from PSI-generated M_1 subharmonic waves to high-frequency internal waves. *Geophys. Res. Lett.*, **49**(2), e2021GL095618, doi: 10.1029/2021GL095618.
- Yasuda, Y., and T. Kohyama (2025): A mechanism of stochastic synchronization in the climate system: an interpretation of the boundary current synchronization as a Maxwell's demon. *J. Climate*, **38**(7), 1573–1594, doi: 10.1175/JCLI-D-24-0436.1.
- Yau, K.-H., G.P. Klaassen, and L.J. Sonmor (2004): Principal instabilities of large amplitude inertio-gravity waves. *Phys. Fluids*, **16**(4), 936–951, doi: 10.1063/1.1643916.
- Young, W.R., and M. Ben Jelloul (1997): Propagation of near-inertial oscillations through a geostrophic flow. *J. Mar. Res.*, **55**(4), 735–766, doi: 10.1357/0022240973224283.
- Young, W.R., Y.-K. Tsang, and N.J. Balmforth (2008): Near-inertial parametric subharmonic instability. *J. Fluid Mech.*, **607**, 25–49, doi: 10.1017/S0022112008001742.
- Zakharov, V.E., V.S. L'vov, and G. Falkovich (1992): *Kolmogorov Spectra of Turbulence I: Wave Turbulence*. Springer, Berlin Heidelberg, Germany, 264 pp.
- Zemskova, V.E., B.L. White, and A. Scotti (2015): Available potential energy and the general circulation: Partitioning wind, buoyancy forcing, and diapycnal mixing. *J. Phys. Oceanogr.*, **45**(6), 1510–1531, doi: 10.1175/JPO-D-14-0043.1.
- Zhao, Z., M.H. Alford, J.B. Girtton, L. Rainville, and H.L. Simmons (2016): Global observations of open-ocean mode-1 M_2 internal tides. *J. Phys. Oceanogr.*, **46**(6), 1657–1684, doi: 10.1175/JPO-D-15-0105.1.
- Zweng, M.M., *et al.* (2013): World Ocean Atlas 2013, Volume 2: Salinity. *NOAA Atlas NESDIS 74*.

Theoretical and numerical study of internal wave resonance causing vertical mixing in the pelagic ocean

Yohei Onuki[†]

Abstract

Internal gravity waves generated by tidal flows passing over steep seafloor topography, known as internal tides, promote the vertical mixing of seawater by generating microscale turbulence. This process significantly influences global ocean circulation, climate change, and marine ecosystems. However, where and how internal tides induce turbulent mixing in the ocean remain poorly understood. To tackle this issue, it is essential to clarify the mechanism by which the energy of internal tides, with horizontal wavelengths exceeding 100 km, cascades down to smaller scales. This paper reviews the historical background and the author's theoretical contributions to the study of parametric subharmonic instability (PSI)-a resonant interaction between internal waves that facilitates the energy cascade from internal tides in mid-latitude regions. Beginning with an elementary explanation of the PSI mechanism, the paper introduces techniques such as the wave kinetic equation, Floquet theory, and direct numerical simulations in transformed coordinate systems. These methods are utilized to address and overcome the challenges faced in previous studies attempting to quantify PSI. In conclusion, the paper discusses recent advances in turbulent mixing and deep ocean circulation and suggests future directions. Additionally, it provides an overview of the author's latest research endeavors, which were inspired by concepts from condensed matter physics.

Key words: Ocean dynamics, Internal gravity waves, Wave-wave interactions, Turbulent mixing, Numerical model

(Corresponding author's e-mail address: onuki@riam.kyushu-u.ac.jp)

(Received 6 December 2024; accepted 19 March 2025)

(doi: 10.5928/kaiyou.34.3_99)

(Copyright by the Oceanographic Society of Japan, 2025)

[†] Research Institute for Applied Mechanics, Kyushu University, 6-1 Kasuga-koen, Kasuga, Fukuoka 816-8580, Japan
e-mail: onuki@riam.kyushu-u.ac.jp