海の研究 (Oceanography in Japan), **16** (2), 143 – 149, 2007

— 論 説 —

解析力学の助けによる自然座標の活用*

川合 英夫 †

要 旨

極座標は無次元の角度座標を含むが，流線座標と流跡線座標との総称である自然座標は純粋な距離座標であり，その時間微分の平方和の半分がそのまま運動エネルギーとなるため扱い易い。しかし，各々の自然座標についての偏微分は，座標軸方向が時空間内で一定していない広義の方向微分であるため，演算子自体が非線形となる結果，偏微分の順序交換が許されず扱い難くなる。他方，解析力学では位置座標の時間微分をも独立変数と見なすような抽象化が進む結果，常識的数理では追随し難くなる。しかし，Ernst Mach が数学に基づく思考経済の典型例だと絶賛したように，解析力学は1階の時間微分で Newton 力学に対処できる。さらに，エネルギー次元をもつ座標変換に対する不変形式も導入されていることから，解析力学は座標変換を簡易化する手法だと見なすことができる。自然座標の流跡線沿いにはポテンシャル渦度も保存され，解析力学の助けを借りて自然座標の活用が期待される。

キーワード：自然座標，解析力学，地球流体力学，距離座標，方向微分

1. 文脈把握か解析追究か

半世紀以上も昔の恥をさらけ出すことにする。京大理学部2回生に在籍の頃 (1947年) だったかと思う。山内 (1941) を購入し解析力学の勉強を始めたが，勉強方法が適切ではなかったような気がする。本書の解析の詳細追究にだけ専念して，思いがけない抽象化には追随できず，いつまでも引っ掛かって読み進めない状況だった。解析能力不足と文脈把握力の未熟とが相まって，解析力学は当時の自分にとって常識的な数理を超越したものだった。しかし，解析力学を支えている背景に流れる文脈の把握に方針を転換して学び直した結果，数理解析の細部にも或る程度は納得して，半世紀余ぶりに解析力学の概要がつかめたように思われ，酷暑のなか一陣のそよ風を捉えたような気分だ。あまり適切ではないが，文脈把握は構想的探究，解析追究は技術的探究とでも譬えられようが，何れの側にも偏り過ぎない探究態度が真理に近づきやすい道ではなかろうか。

2. 地球自転の軸性ベクトル

前置きはこれくらいにして本題に入ろう。相対的に等速直線運動をしている座標系や，慣性の法則 (Newton の運動の第1法則) が成立している座標系は，慣性系 (inertial system) と呼ばれている。慣性系に対する地球自転の軸性ベクトルを$\mathbf{\Omega}$で表し，歳差運動や摂動などを無視すれば，$\mathbf{\Omega}$は近似的に一定と見なされる。$\mathbf{\Omega}$ベクトルの回転の向きは$\mathbf{\Omega}$ベクトルの正の向きに向いたときに右ネジが回転する向き，つまり時計回りに回転する向きだ。ある地点での緯度が ϕ であれば，$\mathbf{\Omega}$に

* 2006年9月10日受領；2006年9月13日受理

† 〒610–0102 京都府城陽市久世芝ケ原 131–81
e-mail address：kawaihid@d2.dion.ne.jp

対して $\phi-$ 90° の角度をなす直線が，その地点での外向きの鉛直座標軸となる。例えば，北極（$\phi = 90°$）では $90° - 90° = 0°$ の角度をなす方向に（つまり$\boldsymbol{\Omega}$の方向に），南極（$\phi = -90°$）では $-90° - 90° = -180°$ の角度をなす方向に（つまり$\boldsymbol{\Omega}$と逆向きに）外向きの鉛直軸が向いていることになる。さらに，その緯度での Coriolis 係数は $f = 2\Omega \sin\phi$ で与えられる。また海水や大気の水平面内流速ベクトルを$\boldsymbol{u}$で表せば，Coriolis 加速度$\boldsymbol{u}\times 2\boldsymbol{\Omega}$ は鉛直座標軸を中軸として，正の$\boldsymbol{u}$の向きから時計回りに 90° の角度をなす方位に向くことになる。そして，鉛直座標軸に局所的に直交する平面が水平面となる。こうした地球流体力学的に慣性系に準拠した方位指定 (orientation) が，本報での考察の根幹となっている。

3. 二種類の右手直交座標系

本報では，次の二種類の右手直交座標系を用いている。

(1) Cartesian 座標系

自転する地球に相対的に静止している海面［geoid とも呼ばれている (今脇, 1995)］では重力と遠心力とが釣り合い，この geoid から等しい重力ポテンシャルの値だけ異なる面を水平面と見なし，この水平面内で東向きに x 軸，北向きに y 軸，各水平面に直交して鉛直外向きに z 軸をもつ局所直交座標系が Cartesian 座標系である。この局所直交座標系では，Coriolis 係数を β 近似する方法と同様に水平面の曲率を無視すれば，座標軸沿いの単位ベクトル $(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k})$ は近似的に定数と見なしても差し支えない。

(2) 自然座標系 (natural coordinate system) [流線座標系 (streamline coordinate system) と流跡線座標系 (trajectory coordinate system) との総称]

水平面へ鉛直投影した流線や流跡線沿いに s 軸，これら投影流線群や流跡線群への直交線沿いに n 軸，(その正の向きは s 軸から + 90° の方向)，鉛直外向きに q 軸をもつ自然座標系 (s, n, q) がもう一つの右手直交座標系である。自然座標軸 (s, n, q) に沿う単位ベクトル ($\boldsymbol{i}_s$, $\boldsymbol{i}_n$, $\boldsymbol{i}_q$) は Cartesian 座標軸沿いの単位ベクトル $(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k})$ と θ とにより

$$\boldsymbol{i}_s \equiv \boldsymbol{i}\cos\theta + \boldsymbol{j}\sin\theta \tag{3.1a}$$

$$\boldsymbol{i}_n \equiv -\boldsymbol{i}\sin\theta + \boldsymbol{j}\cos\theta \tag{3.1b}$$

$$\boldsymbol{i}_q \equiv \boldsymbol{i}_s \times \boldsymbol{i}_n = \boldsymbol{i} \times \boldsymbol{j} = \boldsymbol{k} \tag{3.1c}$$

と表せる。ここにθは$\boldsymbol{i}_s$が$\boldsymbol{i}$に対してなす偏向角で，(7.8) 式で表示されているように流線や流跡線の (円弧の長さ/曲率半径) という無次元量であり，時空間内で大きく変動し得る。他方，単位ベクトル $(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k})$ は水平面の曲率を無視すれば近似的に定数と見なしても差し支えない。

三次元流速ベクトルを$\boldsymbol{V}$で，その水平面内成分を$\boldsymbol{u}$で表せば

$$\boldsymbol{u} \equiv \boldsymbol{i}_s u \tag{3.2a}$$

$$\boldsymbol{V} \equiv \boldsymbol{i}_s u + \boldsymbol{k} w \tag{3.2b}$$

となる。ここに u は恒等的に正の符号をもっている。

4. 自然座標は純粋距離座標

Kawai (2003) は natural coordinates は metric coordinates であると述べたが，これより旧く Kawai (1957) は自然座標に関する数個の恒等式を導いていた。しかし，Kawai (1957) や Kawai (2003) は「自然座標」の範囲を「流線座標」にだけ限定していたのである。その後，RAFOS ブイと呼ばれる等ポテンシャル密度面沿いに漂流する中立浮標の流跡を観測する技術が開発され，Gulf Stream 域で実用に供された結果，RAFOS ブイの漂流経路を，ポテンシャル密度やポテンシャル渦度が保存される流跡線と見なして多くの研究が進められた (Bower *et al.*, 1985; Rossby *et al.*, 1985; Levine *et al.*, 1986; Leaman *et al.*, 1989; Bower and Rossby, 1989; Bower, 1989; Bower, 1991)。因みに，RAFOS は SOFAR の逆さ綴りである (Rossby *et al.*, 1986)。本報では拡大解釈して，自然座標 (natural coordinates) を流線座標と流跡線座標とを総称するものとして用いている。

さらに，$1\frac{1}{2}$ 層の準地衡流モデルを用いて東流する海洋 jet の蛇行が発達した結果できる切離渦の挙動についての数値解析 (Ikeda, 1981; Ikeda and Apel, 1981) や，東流する海洋 jet に伴うポテンシャル渦度の前線の力学や切離渦の挙動についての数値解析 (Stern, 1985; Pratt and Stern, 1986; Pratt, 1988; Pratt *et al.*, 1991) が行なわれた。これらも自然座標を活用した研究成果だと言える。

ところで，Kawai (2003) が用いた "metric"には，(1) 形容詞としての「メートル (法) の」，(2) 名詞としての「距離」という二つの主要な意味があり (小学館ランダムハウス英和大辞典)，metric coordinates としての用法には後者の「距離」の意味がよく当てはまる。他方，解析力学的手法では距離座標自身とその時間微分をも独立変数と見なして，1 階の時間微分だけで Newton 力学に対処している。なお，曲線座標 (curvilinear coordinates) の実例によれば，距離座標だけでなく角度座標も独立変数となっている。曲線座標では，自然座標とは異なって座標の時間微分だけでは運動エネルギーを表すことができず，例えば二次元極座標 (r, θ) の場合には，角度座標の時間微分 θ' ではなく rθ' が運動エネルギーの一成分を構成することになる。それにもかかわらず，自然座標と曲線座標とがよく混同され，この混同が自然座標に関する重大な誤解の一つとなっている。

黒潮続流域での RAFOS ブイなどによる測流結果の報告で，Sainz-Trápaga and Sugimoto (2000) は，stream coordinate system を用いたと述べているが，これは流線座標系か流跡線座標系かの何れかに相当するものであり，本報で総称する自然座標系であることに間違いはない。

流線座標であれ流跡線座標であれ，いずれも純粋な距離座標 (pure, metric coordinates) である。或る瞬間の流線と流跡線上の或る一点における切線速度は等しいが，流線と流跡線の曲率は一般に異なり，Blaton の公式によれば

$$\partial\theta/\partial t = u \times (\text{流跡線の曲率} - \text{流線の曲率})$$

と表せる。

解析力学では Cartesian 距離座標 (x, y, z) や自然距離座標 (s, n, q) の時間微分も独立変数と見なされ，Newton 表示とも称される上付きドットで表記されているが，この表示を本報では上付きプライムで代用した。自然座標ではその 2 成分 (s, q) の時間微分の平方和の半分がそのまま運動エネルギーとなり，解析的に扱い易くなるという特長をもっている。

5. 広義の方向微分

通常の方向微分では θ が時空間内で一定であるため，その演算子は線形であるが，水平面内での二次元自然座標 (s, n) についての偏微分 $(\partial/\partial s, \partial/\partial n)$ は,θ が時空間内で変動する広義の方向微分であるため，方向微分の演算子自身が非線形となる (Kawai, 1957)。この広義の方向微分を

$$\partial/\partial s \equiv \boldsymbol{i}_s\cdot\nabla = \cos\theta(\partial/\partial x) + \sin\theta(\partial/\partial y) \qquad (5.1a)$$

$$\partial/\partial n \equiv \boldsymbol{i}_n\cdot\nabla = -\sin\theta(\partial/\partial x) + \cos\theta(\partial/\partial y) \quad (5.1b)$$

と定義する。水平面内の傾度演算子 ∇_H を (5.2a) のように定義すれば

$$\nabla_H \equiv \boldsymbol{i}(\partial/\partial x) + \boldsymbol{j}(\partial/\partial y) = \boldsymbol{i}_s(\partial/\partial s) + \boldsymbol{i}_n(\partial/\partial n) \quad (5.2a)$$

三次元的傾度演算子 ∇ は (5.2b) のように表せる。

$$\nabla \equiv \nabla_H + \boldsymbol{k}(\partial/\partial z) \qquad (5.2b)$$

ここで単位ベクトル $(\boldsymbol{i}_s, \boldsymbol{i}_n)$ と θ は時空間内で変動するが，単位ベクトル $(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k})$ は水平面の曲率を無視すれば局所的に定数と見なして差し支えない。(5.1) から複数個の関数の和・積・商・合成関数の方向微分は，例え θ が時空間内で変動しても，通常微分と同様に扱える。しかし，2 階以上の方向微分の場合は方向微分の演算子自身が非線形となるため，演算子の交換は許されない [(7.13) — (7.17)]。それにもかかわらず，この交換が許されると見なすのが，自然座標に関するもう一つの重大な誤解となっていた。自然座標のこうした性格と誤解は，自然座標の応用を阻んで来ているので，自然座標に関する恒等的関係式をより体系的にかつ解析的に展示するように努めた (7 節)。

6. 保存量

慣例的な一般力学や解析力学に基づき，各種の保存量を以下に列挙する。

$$m \quad (\text{質量}) \qquad (6.1)$$

$$S \quad (\text{塩分}) \qquad (6.2)$$

$$\rho^* \quad (\text{ポテンシャル密度}) \qquad (6.3)$$

$$M \quad (\text{力学的エネルギー}) = T + U \qquad (6.4)$$

$$L \quad (Lagrangian) = T - U \tag{6.5}$$

$$H \quad (Hamiltonian) = \boldsymbol{p}^2/2m + U \tag{6.6}$$

$$PV(\text{ポテンシャル渦度}) = -(\boldsymbol{Z} \cdot \boldsymbol{\nabla}\rho^*)/\rho \tag{6.7}$$

ここに，$T = \Sigma 0.5(x_i^{\prime})^2$ は運動エネルギー，$U = gz$ は重力ポテンシャル エネルギーであり，いずれも単位質量あたりのエネルギー値である。$\boldsymbol{p}$は運動量，$\boldsymbol{Z}$は絶対渦度ベクトル，ρは密度である (Ertel, 1942; Kawai, 1958; Kawai, 1966)。(6.4) から (6.6) までの各物理量は，人名に由来する座標変換に対する不変量まで含めて，すべてエネルギーの次元をもっている。

また，Lagrangian の定義 (6.5) から，以下の自然座標での Euler-Lagrange の方程式が導かれる。

$$(d/dt)(\partial L/\partial s) - (\partial L/\partial s) = 0 \tag{6.8a}$$

$$(d/dt)(\partial L/\partial n) - (\partial L/\partial n) = 0 \tag{6.8b}$$

$$(d/dt)(\partial L/\partial q) - (\partial L/\partial q) = 0 \tag{6.8c}$$

(6.6) から，以下のように自然座標での Hamilton の方程式が導かれる。

$$\partial H/\partial p = p/m = s^{\prime} \tag{6.9a}$$

$$\partial H/\partial s = \boldsymbol{\nabla} U(s) = -p^{\prime} \tag{6.9b}$$

7. 自然座標での恒等式

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\nabla} &\equiv \boldsymbol{i}(\partial/\partial x) + \boldsymbol{j}(\partial/\partial y) + \boldsymbol{k}(\partial/\partial z) \\ &= \boldsymbol{i}_s(\partial/\partial s) + \boldsymbol{i}_n(\partial/\partial n) + \boldsymbol{i}_q(\partial/\partial q)\end{aligned} \tag{7.1}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{i}_s &= [\boldsymbol{i}(\partial/\partial x) + \boldsymbol{j}(\partial/\partial y) + \boldsymbol{k}(\partial/\partial z)] \\ &\quad \times (\boldsymbol{i}\cos\theta + \boldsymbol{j}\sin\theta) \\ &= -\boldsymbol{i}_s(\partial\theta/\partial z) + \boldsymbol{i}_q(\partial\theta/\partial s)\end{aligned} \tag{7.2}$$

$$\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{i}_n = -\boldsymbol{i}_n(\partial\theta/\partial z) + \boldsymbol{i}_q(\partial\theta/\partial n) \tag{7.3}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{i}_s &= [\boldsymbol{i}(\partial/\partial x) + \boldsymbol{j}(\partial/\partial y) + \boldsymbol{k}(\partial/\partial z)] \\ &\quad \cdot (\boldsymbol{i}\cos\theta + \boldsymbol{j}\sin\theta) \\ &= \partial\theta/\partial n\end{aligned} \tag{7.4}$$

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{i}_n = -\partial\theta/\partial s = -1/r \tag{7.5}$$

$$\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{u} = -\boldsymbol{i}_n \partial\theta/\partial z + \boldsymbol{i}_q \partial\theta/\partial n \tag{7.6}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{u} &= \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{i}_s u = u \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{i}_s + \boldsymbol{i}_s \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{u} \\ &= \partial u/\partial s + u \partial\theta/\partial n\end{aligned} \tag{7.7}$$

(7.2), (7.5) での θ の s 座標についての微分 $\partial\theta/\partial s$ は，(7.8) に示されているように，流線や流跡線の曲率半径 r の逆数に他ならない。

$$\partial\theta/\partial s = 1/r \tag{7.8}$$

ここに r は，北半球では低気圧性偏向の場合に正の符号となる。

水平面の曲率を無視すれば $(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j})$ は局所的に定数と見なせるから，(t, z, s, n) について (3.1a) と (4.1b) とを偏微分すれば次式を得る。

$$\begin{aligned}\partial \boldsymbol{i}_s/\partial t &= \boldsymbol{i}_n \partial\theta/\partial t \\ \partial \boldsymbol{i}_n/\partial t &= -\boldsymbol{i}_s \partial\theta/\partial t\end{aligned} \tag{7.9}$$

$$\begin{aligned}\partial \boldsymbol{i}_s/\partial z &= \boldsymbol{i}_n \partial\theta/\partial z \\ \partial \boldsymbol{i}_n/\partial z &= -\boldsymbol{i}_s \partial\theta/\partial z\end{aligned} \tag{7.10}$$

$$\begin{aligned}\partial \boldsymbol{i}_s/\partial s &= \boldsymbol{i}_n \partial\theta/\partial s \\ \partial \boldsymbol{i}_n/\partial s &= -\boldsymbol{i}_s \partial\theta/\partial s\end{aligned} \tag{7.11}$$

$$\begin{aligned}\partial \boldsymbol{i}_s/\partial n &= \boldsymbol{i}_n \partial\theta/\partial n \\ \partial \boldsymbol{i}_n/\partial n &= -\boldsymbol{i}_s \partial\theta/\partial n\end{aligned} \tag{7.12}$$

(7.9) — (7.12) は，水平面内の自然座標軸方向の単位ベクトルの微分は，その水平面に垂直な座標軸の回りの角速度や微小変位 (dz, ds, dn) あたりの回転角度の軸性ベクトル (正の向きは右ネジが進むときの回転の向き) となることを表している。また，二重偏微分演算子の交換規則と二重偏微分演算子に関する座標変換の規則 (Kawai, 1957) は以下のようになる。

$$\begin{aligned}&(\partial/\partial t)(\partial/\partial s) - (\partial/\partial s)(\partial/\partial t) \\ &= (\partial\theta/\partial t)(\partial/\partial n)\end{aligned} \tag{7.13}$$

$$(\partial/\partial t)(\partial/\partial n) - (\partial/\partial n)(\partial/\partial t)$$
$$= -(\partial\theta/\partial t)(\partial/\partial s) \quad (7.14)$$

$$(\partial/\partial z)(\partial/\partial s) - (\partial/\partial s)(\partial/\partial z)$$
$$= (\partial\theta/\partial z)(\partial/\partial n) \quad (7.15)$$

$$(\partial/\partial z)(\partial/\partial n) - (\partial/\partial n)(\partial/\partial z)$$
$$= -(\partial\theta/\partial z)(\partial/\partial s) \quad (7.16)$$

$$(\partial/\partial n)(\partial/\partial s) - (\partial/\partial s)(\partial/\partial n)$$
$$= (\partial\theta/\partial s)(\partial/\partial s) + (\partial\theta/\partial n)(\partial/\partial n) \quad (7.17)$$

$$\begin{aligned}(\partial^2/\partial s^2) &= \cos^2\theta(\partial^2/\partial x^2) + \sin 2\theta(\partial^2/\partial y\partial x)\\ &+ \sin^2\theta(\partial^2/\partial y^2)\\ &+ (\partial\theta/\partial n)(\partial/\partial n) \quad (7.18)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\partial^2/\partial n^2) &= \sin^2\theta(\partial^2/\partial x^2) - \sin 2\theta(\partial^2/\partial y\partial x)\\ &+ \cos^2\theta(\partial^2/\partial y^2)\\ &- (\partial\theta/\partial n)(\partial/\partial s) \quad (7.19)\end{aligned}$$

$$\nabla_H^2 = (\boldsymbol{i}_s\partial/\partial s + \boldsymbol{i}_n\partial/\partial n)\cdot(\boldsymbol{i}_s\partial/\partial s + \boldsymbol{i}_n\partial/\partial n) \quad (7.20)$$

(7.18) と (7.19) とを辺々加え併せれば

$$\begin{aligned}\nabla_H^2 &= \partial^2/\partial s^2 + \partial^2/\partial n^2 + \partial^2\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2\\ &+ (\partial\theta/\partial n)(\partial/\partial n - \partial/\partial s)\\ &+ J(\theta, X/n, s) \quad (7.21)\end{aligned}$$

(7.21) の最後の項は (7.22) で定義される Jacobian である。

$$J(\theta, X/n, s) \equiv (\partial\theta/\partial n - \partial X/\partial s) \quad (7.22)$$

8. 一般相対性原理と自然座標

一般相対性原理によれば，すべての物理法則は任意の座標系において常に同じ形で表される。しかし，準拠する座標系により物理法則の座標変数が異なるため，例え表される物理的内容が同じであっても，表される式の形が準拠する座標系により異なってくる。例えば，物理法則をベクトルで表せば，ベクトル式の形は座標系によって変らないが，物理法則を座標変数で表せば式の形が変ってくる。自然座標では流線曲率や流跡線曲率が $\partial\theta/\partial s$ として簡便に表現できるので (7.8)，物理法則の内容を直感的に捉え易いという長所もあろうが，人それぞれの得手・不得手により受け取り方は異なるだろう。

謝 辞

水平面に関連する用語についてコメントを頂いた今脇 資郎博士に御礼を述べる。

References

阿部龍蔵 (1994)：力学・解析力学．岩波書店，208 pp.

Bower, A. S. (1989): Potential vorticity balances and horizontal divergence along particle trajectories in Gulf Stream meanders east of Cape Hatteras. *J. Phys. Oceanogr.*, **19**, 1,669–1,681.

Bower, A. S. (1991): A simple kinematic mechanism for mixing fluid parcels across a meandering jet. *J. Phys. Oceanogr.*, **21**, 173–180.

Bower, A. S. and T. Rossby (1989): Evidence of cross-frontal exchange processes in thee Gulf Stream based on isopycnal RAFOS float data. *J. Phys. Oceanogr.*, **19**, 177–1190.

Bower, A. S., H. T. Rossby, and J. L. Lillibridge (1985): The Gulf Stream — barrier or blender ? *J. Phys. Oceanogr.*, **15**, 24–32.

Ikeda, M. (1981): Meanders and detached eddies of a strong eastward flowing jet using a two-layer quasi-geostrophic model. *J. Phys. Oceanogr.*, **11**, 526–540.

Ikeda, M. and J. R. Apel (1981): Mesoscale eddies detached from spatially growing meanders in an eastward-flowing oceanic jet using a two-layer quasi-geostrophic model. *J. Phys. Oceanogr.*, **11**, 1,638–1,661.

Ertel, H. (1942): Ein neuer hydrodynamischer Wirbelsatz. *Met. Z.*, **59**, 277–281.

今脇 資郎 (1995):衛星アルティメター. 海の研究, **4**, 487–508.

Kawai, H. (1957) : On the natural coordinate system and its applications to the Kuroshio System. *Bull. Tohoku Region. Fish. Res. Lab.*, **10**, 141–171.

Kawai, H. (1958) :The natural coordinates on the equiscalar surface undulating with time. *J. Oceanogr. Soc. Japan*, **14**, 1–10.

Kawai, H. (1966): A generalized potential vorticity in the ocean. *Sp. Contr. Geophys. Inst. Kyoto Univ.*, **6**, 79–93.

Kawai, H. (2003): Inertial instability of arbitrarily meandering currents governed by the eccentrically cyclogeostrophic equation. *J. Oceanogr.*, **59**, 163–172.

小出 昭一郎 (1983) : 解析力学. 岩波書店, 176 pp.

Leaman, K. D., E. Johns, and T. Rossby (1989): The average distribution of volume transport and potential vorticity with temperature at three sections across the Gulf Stream. *J. Phys. Oceanogr.*, **19**, 36–51.

Levin, E. R., D. N. Connors, P. C. Cornillon, and H. T. Rossby (1986): Gulf Stream kinematics along an isopycnal float trajectory. *J. Phys. Oceanogr.*, **16**, 1,317–1,328.

Pratt, L. J. (1988): Meander and eddy detachment according to a simple (looking) path equation. *J. Phys. Oceanogr.*, **18**, 1,627–1,640.

Pratt, L. J., J. Earles, P. Cornillon, and J.-E. Cayula (1991): The nonlinear behavior of varicose disturbances in a simple model of the Gulf Stream. *Deep-Sea Res.*, **38**, Suppl. 1. 5,591–5,622.

Pratt, L. J. and M. E. Stern (1986): Dynamics of potential vorticity fronts and eddy detachment. *J. Phys. Oceanogr.*, **16**, 1,101–1,120.

Rossby, H. T., E. R. Levine, and D. N. Connors (1985): The isopycnal Swallow float — A simple device for tracking water parcels in the ocean. *Prog. Oceanogr.*, **14**, 511–525.

Rossby, T., D. Dorson, and J. Fontaine (1986): The RAFOS system. *J. Atmos. Ocean. Tech.*, **3**, 672–679.

Sainz-Trápaga, S. and T. Sugimoto (2000): Three-dimensional velocity field and cross-frontal water exchange in the Kuroshio Extension. *J. Oceanogr.*, **56**, 79–92.

Stern, M. E. (1985): Large scale lateral wave breaking and shingle formation. *J. Phys. Oceanogr.*, **15**, 1,274–1,283.

高橋 康 (1978) : 量子力学を学ぶための解析力学入門. 講談社, 126 pp.

長沼 伸一郎 (1987) : 物理数学の直観的方法. 通商産業研究社, 194 pp.

山内 恭彦 (1941) : 一般力学. 岩波書店, 313 pp.

Practical Use of Natural Coordinates with the Aid of Analytical Dynamics

Hideo Kawai †

Abstract

Since natural coordinates are purely metric coordinates, without non-dimensional, angular coordinates as contained in polar coordinates, half of the squared sum of time derivatives of natural coordinates exactly gives the kinetic energy. This is an easily handled advantage of using natural coordinates. Since each of the differentials with respect to the natural coordinates is a directional differentiation in a wide sense, they become nonlinear operation when associated with a temporally and spatially variable direction, and this prohibits the exchange of order of the directional differentiations. This is disadvantageous for the use of natural coordinates. On the other hand, regarding time derivatives of position coordinates as independent variables in techniques of analytical dynamics leads to extreme abstraction that takes this analysis beyond common, mathematical logic. Newtonian dynamics can be managed by using the first order differentiation only; however, Ernst Mach has regarded analytical dynamics as a typical example of economical thinking based on mathematics. Since several physical quantities of energy (named after pioneering scientists) have been introduced into analytical dynamics, then this must be a technique to easily transform coordinates. We expect to make practical use of the natural coordinates in geophysical fluid dynamics, using analytical dynamics.

Key Words : natural coordinates, analytical dynamics, geophysical fluid dynamics, metric coordnates, directional differentiations

(Corresponding author's e-mail address : kawaihid@d2.dion.ne.jp)
(Received 10 September 2006; accepted 13 September 2006)

† 131–81 Shibagahara, Kuse, Joyo, Kyoto Pref. 610-0102, Japan