

— 論文 —

## 1 次散乱輝度分布の平行平面層モデル\*

田中 昭彦†

### 要 旨

海中における輝度分布の形成過程を理解するには、各散乱次数における輝度分布を解析的に把握する必要がある。そこで、各散乱次数における輝度分布の解析的な理解を目的とし、1 次散乱輝度を算出する平行平面層モデルを開発した。体積散乱関数の定義式から展開し、積分範囲を平行平面層の厚さに止めることにより、平行平面層モデルとして開発した。平行平面層の厚さを無限小にした場合、既存の 1 次散乱モデルと一致する式を得た。平行平面層モデルにしたことによって、放射伝達の数値モデルとして高次散乱までの展開が期待できる。

キーワード：1 次散乱・輝度分布・平行平面層モデル

### 1. はじめに

海中の放射輝度（以下、輝度）は、海中における光の場を表す基本的な物理量である。大気中から海面を通過した光は、水中の物質によって吸収と散乱を繰り返し、海中の輝度分布を形成する。1 回の吸収や散乱によって変化する輝度は、吸収係数および散乱係数によって決定される。船舶観測や、海色リモートセンシングで得られる輝度は、吸収と散乱を十分に繰り返した結果である。したがって、吸収係数や散乱係数に代表される光学的固有特性（inherent optical properties, 以下 IOPS）と、船舶観測や海色リモートセンシングで得られる輝度の関係を解析的に把握するには、輝度分布の形成過程を理解する必要がある。輝度分布の形成過程において、散乱さ

れた回数は散乱次数として表される。それぞれの散乱次数においてその輝度分布は異なり、各散乱次数の輝度分布を合わせることによって海中の輝度分布を表すことができる。すなわち、海中における輝度分布の形成過程を理解するには、各散乱次数の輝度分布を解析的に把握することが必要である。

現在、各散乱次数の輝度分布を算出し、かつ、海中で吸収と散乱を繰り返し発達した輝度分布を算出できる放射伝達の数値モデルに逐次散乱法を用いた平行平面層モデル（以下、逐次散乱モデル）がある（Chami *et al.*, 2001; Zhai *et al.*, 2009; Tanaka, 2010）。平行平面層モデルは、海洋を単散乱仮定ができる薄い平行平面層に分け、それぞれの層における単散乱過程によって変化する輝度を計算するモデルである。観測データと比較検証された逐次散乱モデルに TRAD (Tanaka, 2010) がある。TRAD による計算結果は、Lake Pend Oreille で観測された輝度分布 (Tyler, 1958) や、駿河湾で観測された鉛直上向き輝度や下向きベクトル照度の鉛直分布 (Saruya *et al.*, 1996) と一致することが示されている。しかし、ひとつひとつの散乱次数における輝度分布につ

\* 2012 年 2 月 18 日受領；2012 年 5 月 2 日受理

著作権：日本海洋学会，2012

† 東海大学清水教養教育センター

〒424-8610 静岡県静岡市清水区折戸 3-20-1

TEL: 054-334-0411

e-mail: akihiko@tanaka.email.ne.jp

いては検証されていない。

1次散乱の輝度分布を表す放射伝達モデルに Jerlov and Fukuda (1960) の1次散乱モデル（以下、JFモデル）がある。JFモデルは、海中の微小体積にて1回散乱された輝度を積分した解析的な放射伝達モデルである。また、1次散乱輝度が卓越した表層付近で観測データと良い一致を示している。しかし、JFモデルに用いられた理論をそのまま高次散乱まで展開するのは困難である。川名 (1972) が2次散乱まで、Sugimori and Hasemi (1971) が3次散乱まで展開した。それらは、観測データと表層しか合わない、もしくは他の観測結果と整合性のとれない結果を示した。

JFモデルに用いられた理論を応用し、深い方まで比較的良い一致を示したモデルに薄層モデル (Kishino, 1974) がある。薄層モデルは平行平面層モデルであり、平行平面層内の単散乱過程に1次散乱モデルの理論を適用したモデルである。薄層モデルは、深い方では高次散乱まで考慮されているが、浅い方では低次散乱までしか考慮されていない。また、各散乱次数の輝度分布に分けることは困難である。

現状では、高次散乱まで各散乱次数の輝度分布を求めるためには、平行平面層モデルにする必要がある。JF

モデルは、理論的に導出されたモデルであり、かつ、実際の1次散乱輝度分布を正確に表しているモデルである。しかし、高次散乱までの展開を考慮して開発されたモデルではない。本研究では、高次散乱までの展開を念頭に1次散乱の輝度分布を求める平行平面層モデルを開発した。

## 2. 1次散乱輝度分布の平行平面層モデルの開発

平行平面層モデルでは、海洋を単散乱近似可能な平行平面層に分ける。以降、この平行平面層の厚さを層厚と記す。1次散乱の平行平面層モデルでは、海面を通過した光が任意の深度における層まで透過し、その層内において単散乱され、算出目的の深度までの透過を考えなければならない。そこで、まず任意の深度における層まで透過し、任意の層厚において単散乱される輝度を表す式を導出する。この際、輝度の定義に共通に用いられている放射束の分布を最初に求め、それから輝度分布に変換する。続いて、算出目的の深度まで透過した各層の散乱輝度を合計し、算出目的の深度における1次散乱の輝度分布を表す式を導出する。なお、1次散乱の輝度分布を表す式は、JFモデルと同様に上向きに散乱された場合

Table 1. List of frequently used symbols

Symbol	Description	Unit
$b$	scattering coefficient	$\text{m}^{-1}$
$c$	attenuation coefficient	$\text{m}^{-1}$
$\beta$	volume scattering function	$\text{sr}^{-1} \text{m}^{-1}$
$\hat{\beta}$	normalized volume scattering function ( $= \beta/b$ )	$\text{sr}^{-1}$
$\omega_0$	single scattering albedo ( $= b/c$ )	
$\Phi$	radiant flux	W
$I$	radiant intensity	$\text{W sr}^{-1}$
$E$	irradiance	$\text{W m}^{-2}$
$L$	radiance	$\text{W m}^{-2} \text{sr}^{-1}$
$L_d$	downward radiance	$\text{W m}^{-2} \text{sr}^{-1}$
$L_u$	upward radiance	$\text{W m}^{-2} \text{sr}^{-1}$
$\theta$	nadir angle	radian
$\phi$	azimuth angle	radian
$\Omega$	solid angle	sr
$l, r$	path length	m
$z$	depth	m
$\Delta z$	layer thickness of the layer	m

と下向きに散乱された場合、また下向きに散乱された式については、散乱体積に対する入射天底角と射出天底角が同じ場合と異なる場合について、それぞれの式を導出する。

海洋光学に関する物理量の記号については、IAPSO (1985) に従った (Table 1)。なお、散乱体積に対する入射と射出に関する記号を明確に区別するため、散乱体積に対して入射する物理量にダッシュ付き記号を用い、それ以外の物理量にはダッシュ無し記号を用いる。また、式は可能な限り簡素化する。本研究では任意の単一波長を取り扱うため、波長を表す記号も省略する。

## 2.1 任意の深度および層厚における散乱輝度

光源から任意の距離に位置する散乱体積において、光源の放射束と散乱された放射束の関係を求める。 $\theta$ ,  $\theta'$  を天底角,  $\phi$ ,  $\phi'$  を方位角とする。微小体積  $dV$  において,  $\theta'$ ,  $\phi'$  方向から,  $\theta$ ,  $\phi$  方向へ散乱する体積散乱関数  $\beta(\theta, \phi, \theta', \phi')$  は次式で表される。

$$\beta(\theta, \phi, \theta', \phi') = \frac{dI(\theta, \phi)}{E'(\theta', \phi')dV}. \quad (1)$$

ここで,  $E'$  は  $dV$  に入射するベクトル照度であり,  $I$  は  $dV$  から射出される放射強度である。

$\theta'$ ,  $\phi'$  方向に伸びる底面積  $S$  の柱体を考える (Fig. 1)。柱体は光学的に均質であり, かつ, 内部に光源を持たないものと仮定する。また, 柱体とその周りの屈折率は同じと仮定し, 柱体の上面や底面, 側面において反射は生じないものとする。柱体の上面の位置を  $r_0$ ,  $r_0$  から  $\theta'$ ,  $\phi'$  方向に  $r$  離れた位置を  $r_1$ , さらに  $r_1$  から  $\theta'$ ,  $\phi'$  方向に  $\Delta r$  離れた位置を  $r_2$  とする。また,  $r_1$  から  $\theta'$ ,  $\phi'$  方向に  $l$  ( $l < \Delta r$ ) 離れた位置を  $l_1$  とし,  $l_1$  から  $\theta'$ ,  $\phi'$  方向に微小距離  $dl$  離れた位置を  $l_2$  とする。

$l_1$  から  $l_2$  までの体積を散乱体積として考えると,  $dV = Sdl$  である。 $l_1$  の面に入射する放射束を  $\Phi'_k$ ,  $l_2$  の面から  $\theta$ ,  $\phi$  方向へ射出される放射束を  $\Phi_s$ ,  $\theta$ ,  $\phi$  方向の微小立体角を  $\Omega$  とすると,  $E' = \Phi'_k/S$ ,  $I = \Phi_s/\Omega$  である。これらを Eq. (1) へ代入すると,

$$d\Phi_s = \Phi'_k \beta(\theta, \phi, \theta', \phi') \Omega dl, \quad (2)$$

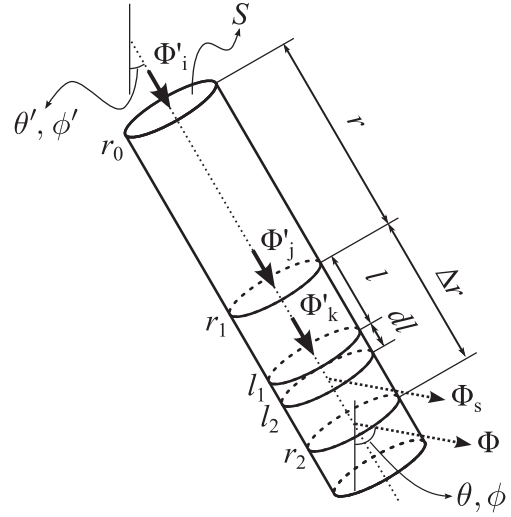


Fig. 1. Illustration of geometric coordinate for calculating scattered radiant flux.

となる。この  $l_1-l_2$  間の関係を  $r_1-r_2$  間へ拡張する。 $r_1$  の面に入射する放射束を  $\Phi'_j$ , 柱体内の消散係数を  $c$  とすると,

$$\Phi'_k = \Phi'_j e^{-cl}, \quad (3)$$

である。 $r_2$  の面から  $\theta$ ,  $\phi$  方向へ射出される放射束を  $\Phi$  とすると,  $\Phi$  は Eq. (3) を, Eq. (2) へ代入し,  $r_1-r_2$  間で積分することによって得られる。すなわち,

$$\begin{aligned} \Phi &= \int_0^{\Delta r} d\Phi_s \\ &= \int_0^{\Delta r} \Phi'_k \beta(\theta, \phi, \theta', \phi') \Omega dl \\ &= \int_0^{\Delta r} \Phi'_j \beta(\theta, \phi, \theta', \phi') \Omega e^{-cl} dl \\ &= \Phi'_j \frac{\beta(\theta, \phi, \theta', \phi')}{c} \Omega (1 - e^{-c\Delta r}), \end{aligned} \quad (4)$$

となる。ここで, 柱体内の散乱係数を  $b$ , 単散乱アルベドを  $\omega_0$ , 規格化体積散乱関数を  $\tilde{\beta}(\theta, \phi, \theta', \phi')$  とすると,  $\omega_0 = b/c$ ,  $\tilde{\beta}(\theta, \phi, \theta', \phi') = \beta(\theta, \phi, \theta', \phi')/b$  なので, Eq. (4) にこれらを代入すると,

$$\Phi = \Phi'_j \tilde{\beta}(\theta, \phi, \theta', \phi') \omega_0 \Omega (1 - e^{-c\Delta r}), \quad (5)$$

となる。また、 $r_0$ の面に入射する放射束を $\Phi'_i$ とすると、 $\Phi'_j = \Phi'_i e^{-\sigma}$ である。よって、 $r_0$ の面に入射する放射束を $\Phi'_i$ と $r_2$ の面で射出される $\Phi$ の関係は、次式で表すことができる。

$$\Phi = \Phi'_i \tilde{\beta}(\theta, \phi, \theta', \phi') \omega_0 \Omega [e^{-\sigma r} - e^{-c(r+\Delta r)}], \quad (6)$$

上式で表された放射束の関係を輝度の関係へ変換する。 $\theta'$ 、 $\phi'$ 方向の微小立体角を $\Omega'$ とし、 $r_0$ の面に入射する放射輝度を $L'$ 、 $r_2$ の面で射出される放射輝度を $L$ とする。 $L'$ および $L$ は輝度の定義から、

$$L' = \frac{\Phi'_i}{S |\cos \theta'| \Omega'}, \quad (7)$$

$$L = \frac{\Phi}{S |\cos \theta| \Omega}, \quad (8)$$

である。Eqs. (6) と (7) を Eq. (8) へ代入すると、

$$L = L' \tilde{\beta}(\theta, \phi, \theta', \phi') \omega_0 \Omega' \frac{|\cos \theta'|}{|\cos \theta|} [e^{-\sigma r} - e^{-c(r+\Delta r)}], \quad (9)$$

が得られる。これは、ある面に入射する $L'$ が $r$ 離れたところまで透過し、そこから $\Delta r$ 間で1回散乱された輝度分布を表す。平行平面層モデルにおいて、深度を $z$ 、層厚を $\Delta z$ とすると、 $r = z |\sec \theta'|$ 、 $\Delta r = \Delta z |\sec \theta'|$ をEq. (9)へ代入することによって、任意の深度および層厚における散乱輝度の分布を得ることができる。

## 2.2 上向き散乱する1次散乱輝度分布

水中を海面直下から鉛直方向に $\Delta z$ ごとの平行平面層に分ける (Fig. 2)。このとき、水中はすべて光学的に均質とする。平行平面層の境界面を浅いほうから、 $z_0$ 、 $z_1$ 、 $z_2$ 、 $\dots$ とし、深度 $z$  (m)の境界面を $z_n$ とする。海面直下 ( $z_0$ )に $\theta'$ 、 $\phi'$ 方向 ( $\theta' < \pi/2$ )から入射した放射輝度を $L'$ とする。 $L'$ が $z_{n-1}$ まで透過し、 $z_{n-1}$ から $z_n$ の層における散乱として、 $z_n$ で上向きに $\theta$ 、 $\phi$ 方向 ( $\theta > \pi/2$ )へ散乱する放射輝度を $L_{u,n}$ とする。 $L_{u,n}$ は、Eq. (9)から、

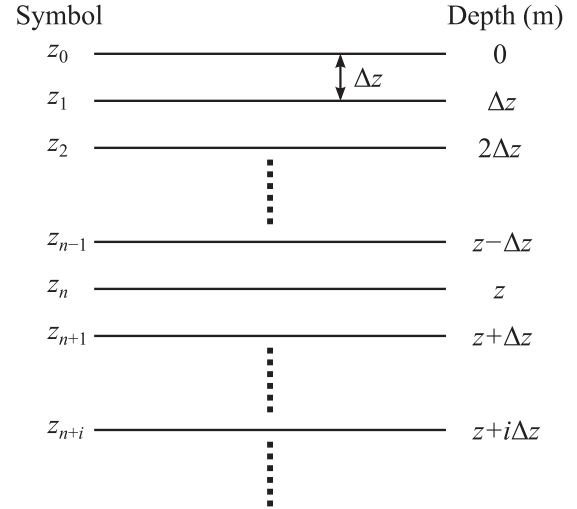


Fig. 2. Illustration of plane-parallel water body.

$$L_{u,n} = L' \tilde{\beta}(\theta, \phi, \theta', \phi') \omega_0 \Omega' \frac{|\cos \theta'|}{|\cos \theta|} \times [e^{-c z_{n-1} |\sec \theta'|} - e^{-c z_n |\sec \theta'|}], \quad (10)$$

となる。さらに下方の $z_{n+1}$ 、 $z_{n+2}$ 、 $z_{n+3}$ で上向き ( $\theta > \pi/2$ )に散乱し、 $z_n$ まで透過する放射輝度を $L_{u,n+1}$ 、 $L_{u,n+2}$ 、 $L_{u,n+3}$ とすると、

$$L_{u,n+1} = L' \tilde{\beta}(\theta, \phi, \theta', \phi') \omega_0 \Omega' \frac{|\cos \theta'|}{|\cos \theta|} \times [e^{-c z_n |\sec \theta'|} - e^{-c z_{n+1} |\sec \theta'|}] e^{-c(z_{n+1}-z_n) |\sec \theta|}, \quad (11)$$

$$L_{u,n+2} = L' \tilde{\beta}(\theta, \phi, \theta', \phi') \omega_0 \Omega' \frac{|\cos \theta'|}{|\cos \theta|} \times [e^{-c z_{n+1} |\sec \theta'|} - e^{-c z_{n+2} |\sec \theta'|}] e^{-c(z_{n+2}-z_n) |\sec \theta|}, \quad (12)$$

$$L_{u,n+3} = L' \tilde{\beta}(\theta, \phi, \theta', \phi') \omega_0 \Omega' \frac{|\cos \theta'|}{|\cos \theta|} \times [e^{-c z_{n+2} |\sec \theta'|} - e^{-c z_{n+3} |\sec \theta'|}] e^{-c(z_{n+3}-z_n) |\sec \theta|}, \quad (13)$$

と、それぞれ表すことができる。よって、 $i \in \mathbb{N}^0$ とするとき、 $z_{n+i}$ で上向き ( $\theta > \pi/2$ )に散乱し、 $z_n$ まで透過する放射輝度 $L_{u,n+i}$ は、Eqs. (10)–(13)から、

$$\begin{aligned}
L_{u,n+i} &= L' \tilde{\beta}(\theta, \phi, \theta', \phi') \omega_0 \Omega' \frac{|\cos \theta'|}{|\cos \theta|} \\
&\quad \times \left[ e^{-c z_{n+i-1} |\sec \theta'|} - e^{-c z_{n+i} |\sec \theta'|} \right] e^{-c(z_{n+i} - z_n) |\sec \theta|} \\
&= L' \tilde{\beta}(\theta, \phi, \theta', \phi') \omega_0 \Omega' \frac{|\cos \theta'|}{|\cos \theta|} \\
&\quad \times e^{-c z |\sec \theta'|} \left[ e^{c \Delta z |\sec \theta'|} - 1 \right] e^{-c i \Delta z (|\sec \theta'| + |\sec \theta|)},
\end{aligned} \tag{14}$$

として表すことができる。深さ  $z$  における上向きの1次散乱輝度分布は、上式における  $i$  を0から $\infty$ まで合計し求めることができる。すなわち、深さ  $z$  における上向き放射輝度を  $L_u$  とすると、

$$\begin{aligned}
L_u &= \sum_{i=0}^{\infty} L_{u,n+i}, \\
&= L' \tilde{\beta}(\theta, \phi, \theta', \phi') \omega_0 \Omega' \frac{|\cos \theta'|}{|\cos \theta|} \\
&\quad \times e^{-c z |\sec \theta'|} \left[ e^{c \Delta z |\sec \theta'|} - 1 \right] \sum_{i=0}^{\infty} e^{-c i \Delta z (|\sec \theta'| + |\sec \theta|)},
\end{aligned} \tag{15}$$

である。ここで、 $c \Delta z (|\sec \theta'| + |\sec \theta|) > 0$  なので、 $0 < |e^{-c \Delta z (|\sec \theta'| + |\sec \theta|)}| < 1$  である。よって、

$$\sum_{i=0}^{\infty} e^{-c \Delta z (|\sec \theta'| + |\sec \theta|) i} = \frac{1}{1 - e^{-c \Delta z (|\sec \theta'| + |\sec \theta|)}}, \tag{16}$$

である。したがって、Eq. (15) は、

$$\begin{aligned}
L_u &= L' \omega_0 \tilde{\beta}(\theta, \phi, \theta', \phi') \Omega' \frac{|\cos \theta'|}{|\cos \theta|} \\
&\quad \times \frac{1 - e^{-c \Delta z |\sec \theta'|}}{e^{-c \Delta z |\sec \theta'|} [1 - e^{-c \Delta z (|\sec \theta'| + |\sec \theta|)}]} e^{-c z |\sec \theta'|},
\end{aligned} \tag{17}$$

となる。これが層厚  $\Delta z$  の平行平面層において、深度  $z$  における上向き1次散乱輝度分布である。ただし、Eq. (14) より  $n \geq 1$  でなければならないので、 $z \geq \Delta z$  である。

### 2.3 下向き散乱する1次散乱輝度分布

上向きの輝度分布を計算した際と同様に、水中は光学的に均質とし、鉛直方向に  $\Delta z$  で分けられた平行平面層を仮定する (Fig. 2)。 $L'$  が  $z_0$  から  $z_1$  の層における散乱として、 $z_1$  で下向きに  $\theta, \phi$  方向 ( $\theta < \pi/2$ ) へ散乱

し、 $z_n$  まで透過する輝度を  $L_{d,0}$  とする。同様に、 $z_2$  で散乱し  $z_n$  まで透過する輝度を  $L_{d,1}$ 、 $z_3$  で散乱し  $z_n$  まで透過する輝度を  $L_{d,2}$  とすると、 $L_{d,0}$ 、 $L_{d,1}$ 、および  $L_{d,2}$  はそれぞれ次式で表すことができる。

$$\begin{aligned}
L_{d,0} &= L' \omega_0 \tilde{\beta}(\theta, \phi, \theta', \phi') \Omega' \frac{|\cos \theta'|}{|\cos \theta|} \\
&\quad \times \left[ e^{-c z_0 |\sec \theta'|} - e^{-c z_1 |\sec \theta'|} \right] e^{-c(z_n - z_1) |\sec \theta|},
\end{aligned} \tag{18}$$

$$\begin{aligned}
L_{d,1} &= L' \omega_0 \tilde{\beta}(\theta, \phi, \theta', \phi') \Omega' \frac{|\cos \theta'|}{|\cos \theta|} \\
&\quad \times \left[ e^{-c z_1 |\sec \theta'|} - e^{-c z_2 |\sec \theta'|} \right] e^{-c(z_n - z_2) |\sec \theta|},
\end{aligned} \tag{19}$$

$$\begin{aligned}
L_{d,2} &= L' \omega_0 \tilde{\beta}(\theta, \phi, \theta', \phi') \Omega' \frac{|\cos \theta'|}{|\cos \theta|} \\
&\quad \times \left[ e^{-c z_2 |\sec \theta'|} - e^{-c z_3 |\sec \theta'|} \right] e^{-c(z_n - z_3) |\sec \theta|},
\end{aligned} \tag{20}$$

よって、 $j$  番目の深度  $z_j (z_j = j \Delta z)$  で下向き散乱し、 $z_n$  まで透過した輝度  $L_{d,j}$  は

$$\begin{aligned}
L_{d,j} &= L' \omega_0 \tilde{\beta}(\theta, \phi, \theta', \phi') \Omega' \frac{|\cos \theta'|}{|\cos \theta|} \\
&\quad \times \left[ e^{-c z_j |\sec \theta'|} - e^{-c z_{j+1} |\sec \theta'|} \right] e^{-c(z_n - z_{j+1}) |\sec \theta|} \\
&= L' \omega_0 \tilde{\beta}(\theta, \phi, \theta', \phi') \Omega' \frac{|\cos \theta'|}{|\cos \theta|} \\
&\quad \times \left[ e^{-c j \Delta z |\sec \theta'|} - e^{-c(j+1) \Delta z |\sec \theta'|} \right] e^{-(n-j-1) c \Delta z |\sec \theta|} \\
&= L' \omega_0 \tilde{\beta}(\theta, \phi, \theta', \phi') \Omega' \frac{|\cos \theta'|}{|\cos \theta|} \\
&\quad \times \left[ 1 - e^{-c \Delta z |\sec \theta'|} \right] e^{-(n-1) c \Delta z |\sec \theta|} e^{-j c \Delta z (|\sec \theta'| - |\sec \theta|)},
\end{aligned} \tag{21}$$

である。ただし、 $0 \leq j \leq n-1$  である。深度  $z$  における下向きの輝度  $L_d$  は、 $L_{d,j}$  を  $j=0$  から  $n-1$  までの総和で求めることができる。したがって、

$$\begin{aligned}
L_d &= \sum_{j=0}^{n-1} L_{d,j}, \\
&= L' \omega_0 \tilde{\beta}(\theta, \phi, \theta', \phi') \Omega' \frac{|\cos \theta'|}{|\cos \theta|} \\
&\quad \times \left[ 1 - e^{-c \Delta z |\sec \theta'|} \right] e^{-(n-1) c \Delta z |\sec \theta|} \\
&\quad \times \sum_{j=0}^{n-1} e^{-j c \Delta z (|\sec \theta'| - |\sec \theta|)},
\end{aligned} \tag{22}$$

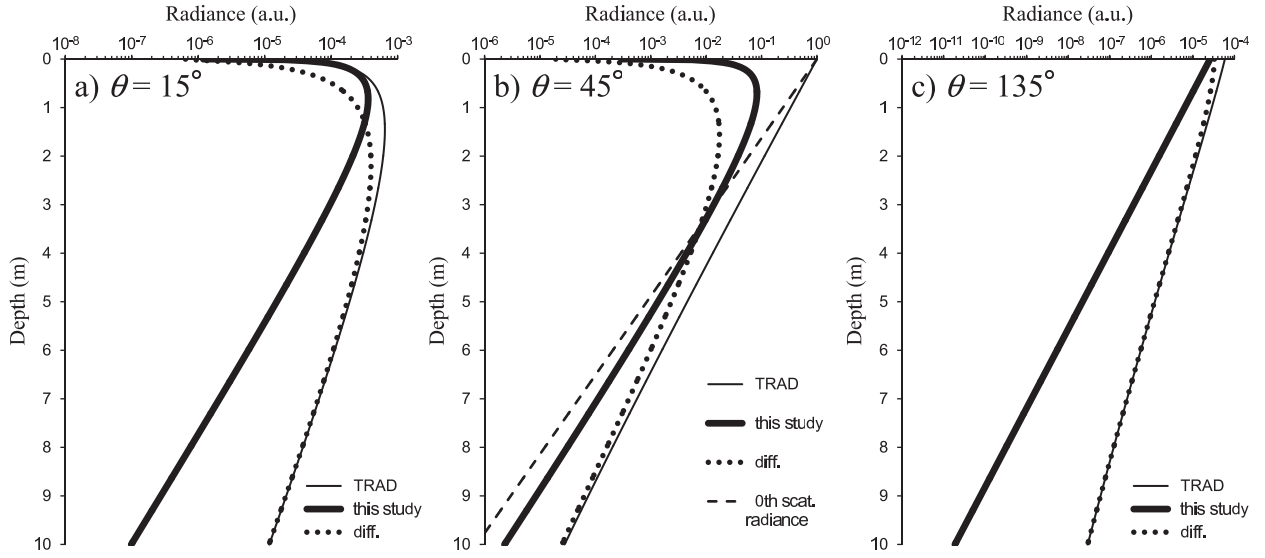


Fig. 3. Example of vertical radiance distributions for (a)  $\theta=15^\circ$ , (b)  $45^\circ$ , and (c)  $135^\circ$  when  $\theta'=45^\circ$ .

となる。

ここで、 $\theta \neq \theta'$  のとき、

$$\sum_{j=0}^{n-1} e^{-jrc\Delta z(|\sec\theta'| - |\sec\theta|)} = \frac{e^{-cn\Delta z(|\sec\theta'| - |\sec\theta|)} - 1}{e^{-c\Delta z(|\sec\theta'| - |\sec\theta|)} - 1}, \quad (23)$$

なので、下向き 1 次散乱輝度を  $L_{d, \theta \neq \theta'}$  とすると、Eq. (22) から、

$$\begin{aligned} L_{d, \theta \neq \theta'} &= L' \omega_0 \tilde{\beta}(\theta, \phi, \theta', \phi') \Omega' \frac{|\cos\theta'|}{|\cos\theta|} \\ &\quad \times \left[ 1 - e^{-c\Delta z|\sec\theta'|} \right] e^{-(n-1)c\Delta z|\sec\theta|} \\ &\quad \times \frac{e^{-cn\Delta z(|\sec\theta'| - |\sec\theta|)} - 1}{e^{-c\Delta z(|\sec\theta'| - |\sec\theta|)} - 1} \\ &= L' \omega_0 \tilde{\beta}(\theta, \phi, \theta', \phi') \Omega' \frac{|\cos\theta'|}{|\cos\theta|} \\ &\quad \times \frac{1 - e^{-c\Delta z|\sec\theta'|}}{e^{-c\Delta z|\sec\theta'|} - e^{-c\Delta z|\sec\theta|}} (e^{-cz|\sec\theta'|} - e^{-cz|\sec\theta|}), \end{aligned} \quad (24)$$

となる。ただし、 $z \geq \Delta z$  である。これが、下向き散乱され、 $\theta \neq \theta'$  の場合における 1 次散乱の輝度分布を表す式である。

一方、 $\theta' = \theta$  の場合の輝度分布を  $L_{d, \theta = \theta'}$  とすると、Eq. (22) より、

$$\begin{aligned} L_{d, \theta = \theta'} &= L' \omega_0 \tilde{\beta}(\theta, \phi, \theta', \phi') \Omega' \frac{|\cos\theta'|}{|\cos\theta|} \\ &\quad \times \left[ 1 - e^{-c\Delta z|\sec\theta'|} \right] e^{-(n-1)c\Delta z|\sec\theta|} n \\ &= L' \omega_0 \tilde{\beta}(\theta, \phi, \theta', \phi') \Omega' \frac{|\cos\theta'|}{|\cos\theta|} \\ &\quad \times \frac{1 - e^{-c\Delta z|\sec\theta'|}}{\Delta z e^{-c\Delta z|\sec\theta'|} - z e^{-cz|\sec\theta|}}, \end{aligned} \quad (25)$$

を得ることができる。ただし、 $z \geq \Delta z$  である。

なお、Eqs. (24), (25) および (17) の結果を Fig. 3 に示す (太い実線)。 $\theta'$  を  $45^\circ$  とし、下向きに散乱し、且つ  $\theta \neq \theta'$  の場合として  $\theta$  が  $15^\circ$  の場合を Fig. 3a に、 $\theta' = \theta$  の場合として  $\theta$  が  $45^\circ$  の場合を Fig. 3b に、また、上向きに散乱した場合として  $\theta$  が  $135^\circ$  の場合を Fig. 3c に示した。この時、 $c=1.0$ 、 $\omega_0=0.5$ 、および  $\Delta z=0.001$  とし、 $\tilde{\beta}$  に Mobley *et al.* (1993) を用いた。また、海中における散乱過程が十分に発達した輝度の例として、全く同じ入力値を用いた数値モデルによる計算結果を Fig. 3 に併せて示した (細い実線)。数値モデルには、TRAD (Tanaka, 2010) を使用した。散乱過程が十分に発達した輝度から 1 次散乱による輝度を差し引いた結果も Fig. 3 に併せて示した (点線)。ただし、 $\theta' = \theta$  の場合 (Fig. 3b) においては、海面を通過した光の

透過光（0 次散乱光）も散乱過程が十分に発達した輝度から差し引いた。

### 3. 1 次散乱輝度分布の平行平面層モデルの検証

前章で導出された式 (Eqs. (17) と (24), (25)) は 1 次散乱の輝度分布を表す式である。すなわち、光路長の離散化を行わない ( $\Delta z$  が無限小) の場合において、同じ 1 次散乱輝度分布を表す式として、JF モデルと一致しなければならない。そこで検証として、Eqs. (17), (24), および (25) のそれぞれに対し、 $\Delta z$  が無限小の場合について新たに式を導出する。

#### 3.1 上向き散乱する 1 次散乱輝度分布の場合

上向きに散乱した 1 次散乱の輝度分布を表す Eq. (17) について  $\Delta z$  を 0 m に近づける。 $\Delta z$  を 0 m に近づけた上向き 1 次散乱の輝度分布を  $L_{u, \Delta z=0}$  とすると、

$$\begin{aligned} L_{u, \Delta z=0} &= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} L_u, \\ &= L' \omega_0 \tilde{\beta}(\theta, \phi, \theta', \phi') \Omega' \frac{|\cos \theta'|}{|\cos \theta|} \\ &\quad \times e^{-c|\sec \theta'|} \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{1 - e^{-c\Delta z |\sec \theta'|}}{e^{-c\Delta z |\sec \theta'|} [1 - e^{-c\Delta z (|\sec \theta'| + |\sec \theta|)}]}, \end{aligned} \quad (26)$$

となる。ここで、

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{1 - e^{-c\Delta z |\sec \theta'|}}{e^{-c\Delta z |\sec \theta'|} [1 - e^{-c\Delta z (|\sec \theta'| + |\sec \theta|)}]} \\ = \frac{|\sec \theta'|}{|\sec \theta'| + |\sec \theta|}, \end{aligned} \quad (27)$$

であるので、Eq. (26) から  $L_{u, \Delta z=0}$  は、

$$\begin{aligned} L_{u, \Delta z=0} &= L' \omega_0 \tilde{\beta}(\theta, \phi, \theta', \phi') \Omega' \\ &\quad \times \frac{|\cos \theta'|}{|\cos \theta|} \frac{|\sec \theta'|}{|\sec \theta'| + |\sec \theta|} e^{-c|\sec \theta'|}, \end{aligned} \quad (28)$$

となる。これは、JF モデルの上向き 1 次散乱輝度分布を表す式と同義である。

#### 3.2 下向き散乱する 1 次散乱輝度分布の場合

下向きに 1 次散乱された輝度分布において  $\theta \neq \theta'$  の場合、 $\Delta z$  を 0 m に近づけた際の輝度分布を  $L_{d, \theta \neq \theta', \Delta z=0}$  とすると、Eq. (24) から、

$$\begin{aligned} L_{d, \theta \neq \theta', \Delta z=0} &= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} L_{d, \theta \neq \theta'}, \\ &= L' \omega_0 \tilde{\beta}(\theta, \phi, \theta', \phi') \Omega' \frac{|\cos \theta'|}{|\cos \theta|} \\ &\quad \times (e^{-c|\sec \theta'|} - e^{-c|\sec \theta|}) \\ &\quad \times \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{1 - e^{-c\Delta z |\sec \theta'|}}{e^{-c\Delta z |\sec \theta'|} - e^{-c\Delta z |\sec \theta|}}, \end{aligned} \quad (29)$$

である。ここで、

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{1 - e^{-c\Delta z |\sec \theta'|}}{e^{-c\Delta z |\sec \theta'|} - e^{-c\Delta z |\sec \theta|}} = \frac{|\sec \theta'|}{|\sec \theta| + |\sec \theta'|}, \quad (30)$$

なので、Eq. (29) は、

$$\begin{aligned} L_{d, \theta \neq \theta', \Delta z=0} &= L' \omega_0 \tilde{\beta}(\theta, \phi, \theta', \phi') \Omega' \\ &\quad \times \frac{|\cos \theta'|}{|\cos \theta|} \frac{|\sec \theta'|}{|\sec \theta| + |\sec \theta'|} \\ &\quad \times (e^{-c|\sec \theta'|} - e^{-c|\sec \theta|}), \end{aligned} \quad (31)$$

となる。これは JF モデルの下向き 1 次散乱輝度において、 $\theta \neq \theta'$  の場合における式と同義である。

同様に  $\theta = \theta'$  の場合、 $\Delta z = 0$  における輝度分布を  $L_{d, \theta = \theta', \Delta z=0}$  とすると、Eq. (25) から、

$$\begin{aligned} L_{d, \theta = \theta', \Delta z=0} &= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} L_{d, \theta = \theta'}, \\ &= L' \omega_0 \tilde{\beta}(\theta, \phi, \theta', \phi') \Omega' \frac{|\cos \theta'|}{|\cos \theta|} \\ &\quad \times z e^{-c|\sec \theta|} \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{1 - e^{-c\Delta z |\sec \theta'|}}{\Delta z e^{-c\Delta z |\sec \theta|}}, \end{aligned} \quad (32)$$

となる。ここで、

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{1 - e^{-c\Delta z |\sec \theta'|}}{\Delta z e^{-c\Delta z |\sec \theta|}} = c |\sec \theta'|, \quad (33)$$

であるので、Eq. (32) は、

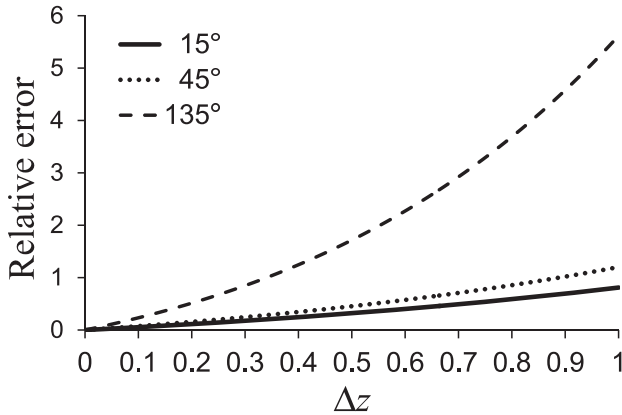


Fig. 4. Relative errors corresponding to  $\Delta z$

$$L_{d,\theta=\theta',\Delta z=0} = L' \omega_0 \tilde{\beta}(\theta, \phi, \theta', \phi') \Omega' \frac{|\cos \theta'|}{|\cos \theta|} \times cz |\sec \theta'| e^{-cz |\sec \theta'|}, \quad (34)$$

となる。これは、JF モデルの下向き 1 次散乱輝度において、 $\theta = \theta'$  の場合における式と同義である。

なお、 $\Delta z = 0$  における輝度分布 (=JF モデルによる輝度分布) に対して、 $\Delta z$  を増加させた際に生じる相対誤差 ( $\varepsilon$ ) を Fig. 4 に示す。相対誤差の計算には次式を用いた。

$$\varepsilon = \frac{|L_{\Delta z=0} - L_{\Delta z \neq 0}|}{L_{\Delta z=0}}, \quad (35)$$

ここで、 $L_{\Delta z=0}$  は  $\Delta z = 0$  における輝度分布であり、 $L_{\Delta z \neq 0}$  は  $\Delta z \neq 0$  における輝度分布である。入力値は Fig. 3 で用いた値と同じ値を用いた。なお、上向きに散乱する場合、下向きに散乱し、且つ、 $\theta \neq \theta'$  の場合、あるいは  $\theta = \theta'$  の場合のいずれにおいても、 $z$  に対する項が約分されるため、深さ方向の相対誤差は一定である。

#### 4. 考察

本研究では、JF モデルとは異なるアプローチで 1 次散乱モデルを平行平面層モデルとして開発した。層厚を 0 m に近づけた際、JF モデルの式と同義の式を得た。このことから、本研究で開発したモデルは、1 次散乱モ

デルとして JF モデルに匹敵するモデルであると言える。また、平行平面層モデルとして開発したことにより、逐次散乱法を用いた放射伝達の数値モデルへ組み込むことが可能である。すなわち、高次散乱までの展開が可能である。

平行平面層モデルにおける短所として、平行平面層内における多重散乱の影響が挙げられる。平行平面層内では単散乱近似が成り立たなければならない。層厚を厚く設定した場合、本来多重散乱を考慮して計算しなければならない層厚に対し、単散乱過程のみしか考慮しないため、計算結果に大きな誤差を含むことになる。したがって、平行平面層モデルにおいて層厚の設定は重要である。近年、層厚に対する多重散乱の影響を理論的に評価する式が提示され (Tanaka, 2010)、逐次散乱法に対して検証された (Tanaka *et al.*, 2012)。本研究で得た 1 次散乱輝度の平行平面層モデルの多重散乱の影響評価も、この式を用いて対応することができる。

本研究では、海中をすべて光学的に均質とした。本研究で得た Eqs. (17), (24) および (25) はすべて  $\Delta z$  に対し  $c$  がかけられている。よって、鉛直的に不均質な場合においては、層厚を深度 ( $\Delta z$ ) ではなく、光学的厚さ ( $\Delta \tau = c\Delta z$ ) で扱うことにより対応できる。すなわち、 $c$  が大きい深度の層については  $\Delta z$  を薄くすることで鉛直的に不均質な場合に対応できる。ただし、平行平面層内は光学的に均質でなければならない。

放射伝達における数値モデルの解法には、逐次散乱法の他に Monte Carlo 法 (Adams and Kattawar, 1993; Saruya *et al.*, 1996) や、invariant imbedding 法 (Mobley, 1989)、discrete ordinate 法 (Jin and Stamnes, 1994) などがある。これらの中で、各散乱次数における輝度分布を算出できるのは、逐次散乱法および Monte Carlo 法である。Monte Carlo 法は確率的にフォトンを追跡する方法であり、理論的な解釈を得ることができない。また、計算結果には統計的な揺らぎが含まれることが知られている (Mobley *et al.*, 1993)。Monte Carlo 法に対し逐次散乱法は、解析的に各散乱次数の輝度分布を得ることができる。Fig. 3 において、散乱過程が十分に発達した輝度と本研究による 1 次散乱の輝度を示した。散乱過程が十分に発達した輝度とは、観測で得られる輝度である。1 次散乱までの輝度と観測



で得られる輝度の差は2次散乱以降の散乱過程によるものである。この2次散乱以降の散乱過程による輝度分布の解析的な理解が今後の課題である。

本研究で得た1次散乱輝度の平行平面層モデルは、既存の逐次散乱法を用いた放射伝達の数値モデルへ組み込むことが可能である。あるいは、本研究で用いた方法で、数値モデルとして高次散乱まで展開することも可能である。ただし、高次散乱まで展開する際には、海面反射の影響を考慮する必要がある。上向きに散乱された輝度の一部は海面で反射し、下向きの輝度に加算される。海面反射による下向きの輝度を1次散乱輝度とする場合もある。しかし、本研究で得た式には、海面反射の影響を表す項がない。したがって、高次散乱まで展開する際には、海面反射によって生じる下向き輝度を加算する必要がある。また、1次散乱は入射輝度が下向きのみを考慮すれば十分であったのに対し、2次散乱以降は上向きの入射輝度を考慮しなければならない。1次散乱では海面を通過した海面直下の光のみ光源として取り扱えば十分であった。しかし、2次散乱以降では、各層で1次散乱された輝度を光源として取り扱わなければならない。これらの課題に対応するためには、今後、任意の反射率の海底が任意の深度に存在した場合に対応できるよう新たに開発する必要がある。すなわち、入射光が上向きの場合においても、海面を任意の反射率を持った海底として取り扱うことで対応できる。

海面を通過した光は、散乱と吸収を繰り返し、輝度分布を形成する。このとき、各散乱次数において散乱される輝度はIOPSで決定される。多くの吸収と散乱を経て十分に発達した輝度分布は、各種放射照度の定義に用いられている。さらに、見かけの光学的性質(AOPS)は、その輝度分布や各種放射照度で定義されている。一般に、統計的に係数を決定する方法(例えば、Kirk, 1984)、あるいは単散乱過程による輝度や照度の変化量から解析的に導く方法(例えば、Hirata, 2003)を用いて、IOPSに対するAOPSあるいは輝度分布や放射照度との関係が導かれている場合が多い。これらの方法とは異なる方法として、各散乱次数における輝度分布を解析的に把握することによってIOPSと輝度分布や各種放射照度、あるいはAOPSとの関係を導き出す方法は重要である。その手法を用いる中で、本研究で開発した1次散乱輝度

の平行平面層モデルは、1次散乱の輝度分布を解析的に把握するため、また2次散乱以降の輝度分布の基礎となるものとして貢献するであろう。

## 謝辞

本研究に関し、東海大学清水教養教育センター大石友彦教授には貴重な御意見をいただきました。また、同センター細野潔教授には、みのりある助言をいただきました。ここに厚くお礼申し上げます。

## References

- Adams, C. N. and G. W. Kattawar (1993): Effect of volume scattering function on the errors induced when polarization is neglected in radiance calculation in an atmosphere-ocean system. *Appl. Opt.*, **32**, 4610–4617.
- Chami, M., R. Santer, and E. Dilligeard (2001): Radiative transfer model for the computation of radiance and polarization in an ocean-atmosphere system: polarization properties of suspended matter for remote sensing. *Appl. Opt.*, **40**, 2398–2416.
- Hirata, T. (2003): Irradiance inversion theory to retrieve volume scattering function of seawater. *Appl. Opt.*, **42**, 1564–1573.
- IAPSO (1985): The international system of units (SI) in oceanography. *UNESCO tech. pap. mar. sci.*, **45**, 124pp.
- Jerlov, N. G. and M. Fukuda (1960): Radiance distribution in the upper layers of the sea. *Tellus*, **12**, 348–355.
- Jin, Z. and K. Stamnes (1994): Radiative transfer in nonuniformly refracting layered media: atmosphere-ocean system. *Appl. Opt.*, **33**, 431–442.
- 川名吉一郎 (1972): 海中照度に及ぼす散乱光の影響。北海道大学水産學部研究彙報, **23**, 82–93.
- Kirk, J. T. O. (1984): Dependence of relationship between inherent and apparent optical properties of water on solar altitude. *Limnol. Oceanogr.*, **29**, 350–356.
- Kishino, M. (1974): Numerical calculation of radiative transfer in the sea. *La Mer*, **12**, 26–33.
- Mobley, C. D. (1989): A numerical model for the computation of radiance distribution in natural waters with windroughened surfaces. *Limnol. Oceanogr.*, **34**, 1473–1483.
- Mobley, C. D., B. Gentili, H. R. Gordon, Z. Jin, G. W. Kattawar, A. Morel, P. Reinersman, K. Stamnes, and R. H. Stavn (1993): Comparison of numerical models for computing underwater light fields. *Appl. Opt.*, **32**, 7484–7504.
- Saruya, Y., T. Oishi, M. Kishino, Y. Jodai, K. Kadokura, and A. Tanaka (1996): Influence of ship shadow on underwater irradiance fields. *Proc. SPIE*, **2963**, 760–765.
- Sugimori, Y. and T. Hasemi (1971): Estimation of underwater scattering radiances up to third order. *J. Oceanogr. Soc. Japan*, **27**, 73–80.

- Tanaka, A. (2010): Numerical model based on successive order of scattering method for computing radiance distribution of underwater light fields. *Opt. Express*, **18**, 10127–10136.
- Tanaka, A., M. Fujii, and T. Oishi (2012): Availability of an equation to evaluate error by optical path discretization in radiative transfer computation based on the successive order of scattering method. *J. Oceanogr.*, **68**, 215–218.
- Tyler, J. E. (1958): Radiance distribution as a function of depth in the submarine environment. *SIO Ref.*, **58** (25), 37 pp.
- Zhai, P. W., Y. Hu, C. R. Trepte, and P. L. Lucker (2009): A vector radiative transfer model for coupled atmosphere and ocean systems based on successive order of scattering method. *Opt. Express*, **17**, 2057–2079.

# Plane-parallel layer model for radiance distribution by primary scattering in the sea

Akihiko Tanaka<sup>†</sup>

## Abstract

In order to understand the formation process of the radiance distribution in the sea, it is necessary to determine the radiance distribution in each scattering order analytically. For this purpose, a plane-parallel layer model that computes primary scattering radiance was developed for obtaining an analytical understanding of the radiance distribution in each scattering order. The plane-parallel layer model was developed from the definitional equation of a volume scattering function and by integrating this function over the thickness of the plane-parallel layer. When the thickness of a plane-parallel layer was considered to be infinitesimal, the formula obtained was in agreement with the existing primary scattering model. By expanding this plane-parallel layer model to high-order scattering, a numerical model for radiation transfer can be obtained.

**Key words:** primary scattering, radiance distribution, plane-parallel layer model

(Corresponding author's e-mail address: [akihiko@tanaka.email.ne.jp](mailto:akihiko@tanaka.email.ne.jp))

(Received 18 February 2012; accepted 2 May 2012)

(Copyright by the Oceanographic Society of Japan, 2012)

---

<sup>†</sup> General Education Center, Shimizu, School of Marine Science and Technology, Tokai University, 3-20-1, Orido, Shimizu-ku, Shizuoka-shi, Shizuoka, 424-8610, Japan